Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 6

Abgabe am 28.11.2017

Aufgabe 1. Es seien $a < b$ reelle Zahlen, $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $X = [a, b]$ und λ das Lebesgueprämaß auf $\mathcal{R}$. Beweisen Sie, dass jede beschränkte Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist (d.h. zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \lambda)$ gehört) und

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f\mathrm{d}\lambda$$

erfüllt.

Erinnerung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ bezeichnet das Riemann-Integral von f.

Anleitung: Zu einer gegebenen Folge von Zerlegung $Z_n = (t_0^{(n)}, \ldots, t_{K_n}^{(n)})$ mit $|Z_n| \to 0$ seien

$$m_i^{(n)} := \inf\{f(x) \mid t_{i-1}^{(n)} \leq x \leq t_i^{(n)}\} \text{ und } M_i^{(n)} := \sup\{f(x) \mid t_{i-1}^{(n)} \leq x \leq t_i^{(n)}\}.$$

Betrachen Sie die Folgen von Elementarfunktionen

$$u_n = \sum_{i=1}^{K_n} m_i^{(n)} 1_{(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]} \text{ und } o_n = \sum_{i=1}^{K_n} M_i^{(n)} 1_{(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass (u_n) in n monoton wächst, (o_n) in n monoton fällt und $u_n \leq f \leq o_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass (u_n) punktweise gegen eine Funktion u konvergiert, (o_n) punktweise gegen eine funktion o konvergiert und dass beide Folgen $\|\cdot\|_1$-Cauchy-Folgen sind.

(c) Zeigen Sie $\int_{[a,b]} u\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} o\mathrm{d}\lambda$ und schließen sie daraus $u = o = f$ λ-fast überall. Dies liefert die gewünschte Aussage (Warum?).

Aufgabe 2.

Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring über X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Weiterhin sei I ein Intervall und $f : I \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

(a) Für alle $t \in I$ gilt $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$.

(b) Es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit $|f(t, x)| \leq g(x)$ für alle $x \in X$.

(c) Für alle $x \in X$ ist die Funktion $I \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t, x)$ stetig.

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R},\ F(t) = \int_X f(t, \cdot)\mathrm{d}\mu$$

stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Konvergenzsatz von Lebesgue.

Aufgabe 3. Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Mengenring über X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Zeigen Sie, dass für nichtnegative $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} n \int_X \log\left(1 + \frac{f}{n}\right) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

gilt.

Hinweis: Satz über monotone Konvergenz. Sie dürfen benutzen, dass $\log\left(1 + \frac{f}{n}\right) \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$.

Aufgabe 4. Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen von X. Zeigen Sie:

(a) Die Menge
$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}} \mathcal{A}$$
ist eine σ-Algebra.

(b) Ist $\mathcal{B}$ eine weitere σ-Algebra mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, so gilt $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$. Es ist also $\sigma(\mathcal{F})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält.

(c) Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{F})$. Gilt $\{2, 4\} \in \sigma(\mathcal{F})$?

Zusatzaufgabe 5. Es sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren über $\mathbb{R}$ und λ das Lebesgue-Prämaß auf $\mathcal{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte uneigentlich Riemann-integriebare Funktion, deren Betrag $|f|$ auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ und
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda.$$
Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \sin(x)/x & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

uneigentlich Riemann-intergrierbar ist, aber nicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ liegt.

Erinnerung: Eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar, falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Funktion f auf den Intervallen $[x, c]$ und $[c, y]$ Riemann-integrierbar ist, und die Grenzwerte

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^c f(x)\mathrm{d}x \text{ und } \lim_{y\to\infty} \int_c^y f(x)\mathrm{d}x$$

existieren.