

# Analysis I und II - Notizen<sup>1</sup>

Daniel Lenz

---

<sup>1</sup>Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Besten Dank an alle, die zu Verbesserungen früherer Notizen zur Analysis I beigetragen haben, und besonderen Dank an Daniel Kilian, Stefan Neumann und Frank Nußbaum für systematisches Durcharbeiten und Verschönern



## Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung: Zwei kleine Rechnungen	4
Eine Rechnung	4
Eine andere Rechnung	4
Folgerung	4
Grundlagen	5
1. Mengen	5
2. Funktionen	6
3. Relationen	7
4. Verknüpfungen	7
Kapitel 1. Die natürlichen Zahlen	8
Kapitel 2. Die reellen Zahlen	18
1. Die Körperstruktur	18
2. Die Ordnungsstruktur	22
3. Ordnungsvollständigkeit	27
4. Die Charakterisierung	28
Kapitel 3. Archimedisches Axiom und Intervallschachtelungsprinzip	33
1. Das Archimedische Axiom	33
2. Intervallschachtelungsprinzip	35
3. Eine Äquivalenz	37
Kapitel 4. Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$	38
1. Definitionen und Rechenregeln	38
2. Aspekte der Vollständigkeit	45
3. Teilfolgen und Häufungspunkte	52
Kapitel 5. Mächtigkeit	57
Kapitel 6. Die komplexen Zahlen	60
Kapitel 7. Summen und Reihen	66
Kapitel 8. Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen	82

## **Vorbemerkung: Zwei kleine Rechnungen**

### **Eine Rechnung**

Der Kurs wird mit 9 Leistungspunkten (LP) gewertet. Jeder Leistungspunkt entspricht 30h Arbeit. Damit geht es um

270h Arbeit

Davon gehen ab:

–90h (6 h Vorlesung und Übung in 15 Wochen)

–80h (2 Wochen Prüfungsvorbereitung à 40 h).

Damit verbleiben noch 100 h Arbeit. Auf 15 Wochen verteilt bedeutet dies ca.

7 h Arbeit/ Woche

also

1 h Arbeit / Tag.

### **Eine andere Rechnung**

Der Stoff der ersten drei Semester wurde beginnend mit Newton und Leibniz um 1670 bis etwa 1920 entwickelt. Es handelt sich also um

250 Jahre Entwicklung.

Bei 45 Wochen für die ersten drei Semester, wird also in einer Woche Vorlesung etwa

5 Jahre Entwicklung ~ 260 Wochen

behandelt.

### **Folgerung**

Es muß gearbeitet werden!

# Grundlagen

Wir setzen Grundtatsachen der Mengenlehre voraus und erinnern in diesem Kapitel an einige Begriffe und Bezeichnungen.

## 1. Mengen

Ist  $X$  eine Menge so schreiben wir  $x \in X$  (lies:  $x$  Element von  $X$ ) falls  $x$  zu  $X$  gehört. Gehört  $x$  nicht zu  $X$ , so schreibt man  $x \notin X$ . Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Dann bedeutet  $Y \subset X$  (lies:  $Y$  Teilmenge von  $X$ ), daß jedes Element von  $Y$  auch zu  $X$  gehört. Es bezeichnet  $X \setminus Y$  (lies:  $X$  ohne  $Y$ ) die Menge der Elemente von  $X$ , die nicht zu  $Y$  gehören. Der *Durchschnitt*  $X \cap Y$  der Mengen  $X$  und  $Y$  ist gegeben durch

$$X \cap Y := \{z : z \in X \text{ und } z \in Y\}.$$

Die *Vereinigung* der Mengen  $X$  und  $Y$  ist gegeben durch

$$X \cup Y := \{z : z \in X \text{ oder } z \in Y\}.$$

Die *Potenzmenge*  $\mathcal{P}(X)$  einer Menge  $X$  ist die Menge aller Teilmengen von  $X$ . Die leere Menge wird mit  $\emptyset$  bezeichnet.

Ist  $A$  eine Menge und zu jedem  $\alpha \in A$  eine Menge  $X_\alpha$  gegeben, so nennt man  $X_\alpha, \alpha \in A$ , eine *Familie von Mengen*. Für eine Familie  $X_\alpha, \alpha \in A$ , von Mengen definiert man

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \{z : z \text{ gehört zu (mindestens) einer der Mengen } X_\alpha\}$$

sowie

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha := \{z : z \text{ gehört zu allen Mengen } X_\alpha\}.$$

Ist  $X_\alpha, \alpha \in A$ , eine Familie von Mengen und  $X$  eine Menge, so gilt (siehe Übung)

$$X \setminus \bigcup_{\alpha} X_\alpha = \bigcap_{\alpha} X \setminus X_\alpha$$
$$X \setminus \bigcap_{\alpha} X_\alpha = \bigcup_{\alpha} X \setminus X_\alpha.$$

Aus zwei Objekten  $a, b$  bilden wir das *geordnete Paar*  $(a, b)$ . Damit können wir aus zwei Mengen  $X, Y$  das *kartesische Produkt*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

bilden.

## 2. Funktionen

Eine *Abbildung* oder *Funktion*  $f$  von einer Menge  $X$  in die Menge  $Y$  ist eine Zuordnung, die jedem Element von  $X$  genau ein Element von  $Y$  zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \longrightarrow Y \text{ oder } X \longrightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Es heißt dann  $X$  der *Definitionsbereich* von  $f$ ,  $Y$  der *Wertebereich* von  $f$  und  $\text{Bild}(f) := \{f(x) : x \in X\} \subset Y$  das *Bild* von  $f$ . Ist  $f : X \longrightarrow Y$  eine Funktion und  $A \subset Y$ , so heißt

$$f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$$

das *Urbild* von  $A$  unter  $f$ .

**Beispiel.** Sei  $X$  eine beliebige Menge. Dann ist  $\text{id}_X : X \longrightarrow X$  die Abbildung, die  $x \in X$  auf  $x \in X$  abbildet. Etwa:  $X = \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$ .

Die *Komposition*  $g \circ f$  der Abbildungen  $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$  ist gegeben durch

$$g \circ f : X \longrightarrow Z, x \mapsto g(f(x)).$$

Komposition ist assoziativ d.h. es gilt

$$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h.$$

(Denn  $g \circ (f \circ h)(x) = g((f \circ h)(x)) = g((f(h(x)))) = (g \circ f)(h(x)) = (g \circ f) \circ h(x)$ .) Damit können wir also die Klammern weglassen.

Eine Abbildung  $f : X \longrightarrow Y$  heißt *surjektiv*, wenn zu jedem  $y \in Y$  ein  $x \in X$  existiert mit  $y = f(x)$  (d.h.  $\text{Bild}(f) = Y$ ).

Eine Abbildung  $f : X \longrightarrow Y$  heißt *injektiv*, wenn aus  $x \neq z$  folgt  $f(x) \neq f(z)$ .

Ist  $f : X \longrightarrow Y$  injektiv und surjektiv, so heißt es bijektiv.

**Behauptung.** Sei  $f : X \longrightarrow Y$  gegeben. Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  bijektiv.
- (ii) Es gibt ein  $g : Y \longrightarrow X$  mit  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$ .

In diesem Fall, ist die Funktion  $g$  aus (ii) eindeutig bestimmt. Beweis. (Übung)

Die Funktion  $g$  wird *Umkehrfunktion* von  $f$  genannt und (oft) mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

Schließlich brauchen wir manchmal noch Einschränkungen von Funktionen: Sei  $f : X \longrightarrow Y$  gegeben und  $A$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann bezeichnen wir mit  $f_A$  oder  $f|_A$  die *Einschränkung* von  $f$  auf  $A$  gegeben durch

$$f|_A : A \longrightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

### 3. Relationen

Eine *Relation* auf eine Menge  $X$  ist eine Teilmenge  $R$  von  $X \times X$ . Statt  $(x, y) \in R$  schreibt man oft auch  $x \stackrel{R}{\sim} y$  oder  $x \sim y$ .

Eine Relation auf  $X$  heißt

- *reflexiv*, wenn gilt:  $x \sim x$  für alle  $x \in X$ , (Zeichnung)
- *symmetrisch*, wenn gilt:  $x \sim y \implies y \sim x$ , (Zeichnung)
- *transitiv*, wenn gilt:  $x \sim y$  und  $y \sim z \implies x \sim z$ . (Zeichnung in Übung)

Eine *Äquivalenzrelation* ist eine reflexive, symmetrische, transitive Relation.

**Beispiel.**  $X =$  Bewohner von Jena und

$$R_1 = \{(x, y) : x \text{ und } y \text{ haben am selben Tag Geburtstag}\}$$

$$R_2 = \{(x, y) : x \text{ und } y \text{ kennen sich}\}$$

$$R_3 = \{(x, y) : x \text{ kennt } y\}$$

Dann ist  $R_1$  eine Äquivalenzrelation. Es ist  $R_2$  reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv. Es ist  $R_3$  reflexiv.

Eine *Ordnungsrelation* oder *Ordnung* auf einer Menge  $X$  ist eine Relation  $\leq$ , die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Dabei heißt antisymmetrisch, daß

$$x \leq y \text{ und } y \leq x \implies x = y.$$

Ist  $\leq$  eine Ordnungsrelation auf  $X$ , so heißt das Paar  $(X, \leq)$  eine *geordnete Menge*. Eine geordnete Menge heißt *total geordnet*, wenn für alle  $x, y \in X$  immer  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt.

'**Beispiele**'.  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Q}, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}, \leq)$

←—————→  
Ende der 1. Vorlesung.

### 4. Verknüpfungen

Eine Abbildung  $* : X \times X \longrightarrow X$  heißt *Verknüpfung* auf  $X$ . Man schreibt oft  $x * y$  statt  $*(x, y)$ . Die Verknüpfung  $* : X \times X \longrightarrow X$  heißt

- kommutativ, wenn gilt  $x * y = y * x$  für alle  $x, y \in X$
- assoziativ, wenn gilt  $x * (x * z) = (x * y) * z$  für alle  $x, y, z \in X$ .

Ist die Verknüpfung assoziativ, so kann man die Klammern auch weglassen.

## KAPITEL 1

### Die natürlichen Zahlen

In diesem Kapitel lernen wir einen axiomatischen Zugang zu den natürlichen Zahlen kennen. Dieser Zugang liefert das Prinzip der vollständigen Induktion und die Möglichkeit der rekursiven Definition. Das werden wir genauer studieren. Der Zugang erlaubt es ebenfalls, die üblichen Rechenregeln und Eigenschaften zu beweisen. Das werden wir nur ansatzweise verfolgen, da wir diese im folgenden Kapitel als Nebenprodukt einfach erhalten.

Die charakteristische Struktur der natürlichen Zahlen ist folgende:

**Zeichnung.**  $1 \overset{+1}{-} > 2 \overset{+1}{-} > 3 \overset{+1}{-} > 4 \overset{+1}{-} > \dots$

Das Problem sind die Punkte '...!' An der Zeichnung lesen wir ab:

- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger und verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
- Beginnt man bei 1 und bildet sukzessive die Nachfolger, so erhält man alle natürlichen Zahlen.
- Die Zahl 1 ist keine Nachfolger.

Eine präzise Fassung dieser Eigenschaften liefern die **Peano Axiome**.

**DEFINITION.** (*Peano Axiome*) Ein Tripel  $(N, e, \nu)$  bestehend aus einer Menge  $N$  zusammen mit einem ausgezeichneten Element  $e$  und einer Abbildung  $\nu : N \rightarrow N \setminus \{e\}$  genügt den Peanoaxiomen, wenn gilt:

(P1)  $\nu : N \rightarrow N \setminus \{e\}$  ist injektiv.

(P2) (*Induktionsaxiom*) Enthält eine Teilmenge  $M$  von  $N$  das Element  $e$  und enthält sie mit jedem Element  $n$  immer auch  $\nu(n)$ , so gilt  $M = N$ .

Es heißt  $\nu$  die Nachfolgeabbildung und  $\nu(n)$  der Nachfolger von  $n$ .

**Weiteres Vorgehen:** Die Peano Axiome charakterisieren die natürlichen Zahlen in folgendem Sinne: Man kann beweisen, daß es ein System gibt, daß diesen Axiomen genügt (wenn man Existenz einer unendlichen Menge voraussetzt), und daß ein solches System eindeutig bestimmt ist (bis auf Umbenennung). Dieses System werden wir später mit  $\mathbb{N}$  bezeichnen. Wir werden die Eindeutigkeit eines solchen Systemes bald beweisen und die Rechenoperationen im nächsten Kapitel einführen.

**Bemerkung.** (a) Eine Teilmenge  $M$  von  $N$  mit  $e \in M$  und  $\nu(n) \in M$  für alle  $n \in M$  wird auch induktiv genannt.



(b) Hinter (P1) verbergen sich mehrere Forderungen, insbesondere folgende:

- $\nu$  bildet von  $N$  nach  $N \setminus \{e\}$  ab.
- $\nu$  ist injektiv.
- Es ist  $e$  kein Nachfolger.

Diese Forderungen zusammen mit (P2) werden liefern, daß

- $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$  sogar bijektiv ist (s.u.).

Die vorangegangenen vier Spiegelstriche werden manchmal als eigene Axiome aufgelistet.

(c) Das Induktionsaxiom liefert eine Art mit ' $\dots$ ' umzugehen.

(d) In den Peano Axiomen ist die Forderung, daß  $e$  kein Nachfolger ist, wesentlich. Sie garantiert, daß die Menge unendlich viele Elemente hat. Man kann eine endliche Menge  $N$  angeben mit ausgezeichnetem Element  $e$  und einer injektiven Abbildung  $\nu : N \longrightarrow N$ , so daß (P2) gilt (Übung).

**FOLGERUNG.** *Es genüge  $(N, e, \nu)$  den Peano Axiomen. Dann ist die Abbildung  $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$  bijektiv (d.h.  $e$  ist kein Nachfolger und jedes andere Element von  $\mathbb{N}$  ist ein Nachfolger) und es gilt  $\nu(n) \neq n$  für alle  $n \in N$ .*

*Beweis. Bijektivität.* Es reicht zu zeigen, daß  $\nu$  surjektiv ist.

Sei

$$M := \{e\} \cup \{n \in N : n \text{ ist ein Nachfolger d.h. es existiert } m \in N \text{ mit } \nu(m) = n\}.$$

Dann gilt also:

$$e \in M.$$

$$n \in M \text{ impliziert } \nu(n) \in M \text{ (da jeder Nachfolger in } M \text{ ist).}$$

Aus (P2) folgt also  $M = N$ .

*Es gilt  $\nu(n) \neq n$  für alle  $n \in N$ :* Sei  $T$  die Menge der  $n \in N$  mit  $\nu(n) \neq n$ . Dann gilt  $e \in T$  (klar) und aufgrund der Injektivität von  $\nu$  gilt auch, dass  $n \in T$  impliziert  $\nu(n) \in T$ . Damit ist  $T$  induktiv.  $\square$

Wir kommen nun zu einer wesentlichen Konsequenz aus den Peanoaxiomen. Diese ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

**Prinzip der vollständigen Induktion.** Sei  $(N, e, \nu)$  induktiv. Sei für jedes  $n \in N$  eine Aussage  $A(n)$  gegeben, sodaß gilt:

- $A(e)$  ist wahr. (Induktionsanfang)
- Aus  $A(n)$  folgt  $A(\nu(n))$ . (Induktionsschluss)

Dann ist  $A(n)$  wahr für alle  $n \in N$ .

*Beweis.* Sei  $T$  die Menge der  $n \in N$ , so daß  $A(n)$  wahr ist. Dann folgt aus dem Induktionsaxiom und der Voraussetzung, daß  $T = N$ . Das ist gerade die Aussage.  $\square$

**Notation.** Statt 'A(e) wahr' und 'Aus A(n) folgt A( $\nu(n)$ )' schreibt man meist ' $n = 1$ ' und ' $n \implies n + 1$ '.

**'Beispiel.'** Die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen  $S_n := \sum_{k=1}^n k$  ist gerade  $n(n+1)/2$ .

Bew.  $n = 1$ : klar

$$n \implies n+1: S_{n+1} = (n+1) + S_n = (n+1) + (n+1)n\frac{1}{2} = (n+1)(1+n\frac{1}{2}) = (n+1)(2+n)\frac{1}{2}.$$

Eine weitere wesentliche Konsequenz der Peano Axiome ist die Möglichkeit der rekursiven Definition. (Beispiel  $n!$ ). Um das auszuführen, bedarf es einiger Vorbereitungen. Dabei werden wir einige Folgerungen aus den Peano Axiomen ziehen, die auch schon für sich von Interesse sind.

**FOLGERUNG.** (Menge der Zahlen, die größer als  $n$  sind) Es genüge  $(N, e, \nu)$  den Peanoaxiomen. Dann gibt es zu jedem  $n \in N$  eine eindeutige Menge  $M_n \subset N$  mit

- (1)  $n \notin M_n$
- (2)  $\nu(n) \in M_n$
- (3) Ist  $k \in M_n$  so auch  $\nu(k)$ .

Die Mengen  $M_n$  erfüllen  $M_e = N \setminus \{e\}$  und  $M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}$  für alle  $n \in N$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Existenz und Eindeutigkeit von Mengen  $M_n$  mit den angegebenen Eigenschaften (1), (2), (3). Sei  $T$  die Menge der Elemente  $n \in N$  für die eine eindeutige Menge  $M_n$  mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Wir zeigen, daß  $T$  induktiv ist.

**Es gilt  $e \in T$ :**

*Existenz:* Die Menge  $N \setminus \{e\}$  hat die gewünschten Eigenschaften:

- $e \notin N \setminus \{e\}$ : klar.
- $\nu(e) \in N \setminus \{e\}$ : klar (da  $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ ).
- $n \in N \setminus \{e\} \implies \nu(n) \in M_e$ : klar (da  $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ )

*Eindeutigkeit:* Ist  $M'_e$  eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften, so betrachten wir  $M := \{e\} \cup M'_e$ . Dann gilt  $e \in M$  und  $n \in M$  impliziert  $\nu(n) \in M$  (für  $n = e$  wegen (2) und für  $n \neq e$  wegen (3)). Damit folgt also nach dem Induktionsaxiom  $M = N$  und damit  $M'_e = N \setminus \{e\}$ . Das zeigt die Eindeutigkeit.

←  
Ende der 2. Vorlesung.

$n \in T$  impliziert  $\nu(n) \in T$ :

Setze  $m := \nu(n)$ .

*Existenz:* Wir betrachten die Menge  $M_n \setminus \{m\}$ . Diese Menge hat die gewünschten Eigenschaften:

- $m \notin M_n \setminus \{m\}$ : klar .

- $\nu(m) \in M_n \setminus \{m\}$ :  $m = \nu(n) \in M_n$  wegen  $(2)_n$ , also  $\nu(m) \in M_n$  wegen  $(3)$  angewendet auf  $M_n$ . Weiterhin  $\nu(m) \neq m$  (s.o.).
- $l \in M_n \setminus \{m\} \implies \nu(l) \in M_n \setminus \{m\}$ :  $l \in M_n$  impliziert  $\nu(l) \in M_n$ . Weiterhin  $\nu(l) \neq m = \nu(n)$ , sonst  $n = l$  Widerspruch zu  $n \notin M_n$ .)

*Eindeutigkeit:* Ist  $M'_m$  eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften, so erfüllt  $\{m\} \cup M'_m$  die charakteristischen Eigenschaften der Menge  $M_n$ :

- $n \notin \{m\} \cup M'_m$ :  $n \neq m = \nu(n)$  (s.o.) und  $n \notin M'_m$  (da sonst  $m = \nu(n) \in M'_m$ . Widerspruch zu  $(2)_m$ ).
- $\nu(n) \in \{m\} \cup M'_m$ : klar (da  $m = \nu(n)$ ).
- $l \in \{m\} \cup M'_m$  impliziert  $\nu(l) \in \{m\} \cup M'_m$ : Für  $l = m$  wegen  $(2)_m$  und für  $l \in M'_m$  wegen  $(3)_m$ .

Aufgrund der schon bewiesenen Eindeutigkeit gilt dann  $\{m\} \cup M'_m = M_n$  und damit also  $M'_m = M_n \setminus \{m\}$ . Das zeigt die Eindeutigkeit.

Die letzte Aussage wurde mitbewiesen.  $\square$

**FOLGERUNG** (Menge der Zahlen, die kleiner gleich  $n$  sind). *Es genüge  $(N, e, \nu)$  den Peanoaxiomen. Dann gibt es eine eindeutige Familie von Mengen  $A_n \subset N$ ,  $n \in N$ , mit*

$$A_e = \{e\} \text{ und } A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}.$$

*Es gilt  $n \in A_n$  sowie  $\nu(n) \notin A_n$  für alle  $n \in N$ . Weiterhin gilt für beliebige  $k, n \in N$  noch  $A_k \subset A_n$  falls  $k \in A_n$  und  $A_n \subset A_k$  falls  $k \notin A_n$ .*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Existenz und Eindeutigkeit solcher  $A_n$ :

*Existenz.* Seien  $M_n$ ,  $n \in N$ , die Mengen aus der vorangehenden Folgerung. Nach der vorangegangenen Folgerung gilt  $M_e = N \setminus \{e\}$  und  $M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}$ . Dann erfüllen die Mengen  $A_n := N \setminus M_n$

$$A_e = \{e\}, \text{ sowie } A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$$

für alle  $n \in N$ .

*Eindeutigkeit.* Sei  $(A'_n)$ ,  $n \in N$ , eine Familie von Teilmengen von  $N$  mit  $A'_e = \{e\}$  und  $A'_{\nu(n)} = A'_n \cup \{\nu(n)\}$ . Sei  $L := \{n \in N : A_n = A'_n\}$ . Dann sieht man sofort, daß  $L$  induktiv ist, und es folgt die Eindeutigkeit.

Die Aussage  $n \in A_n$  folgt (mit der Fallunterscheidung  $n = e$  und  $n \neq e$ ) für alle  $n \in N$  aus den charakteristischen Eigenschaften der  $A_n$ .

$A_k \subset A_n$  falls  $k \in A_n$ :

Sei  $L$  die Menge aller  $n \in N$ , für die gilt  $A_k \subset A_n$  falls  $k \in A_n$ . Dann gilt  $e \in L$  sowie  $\nu(n) \in L$  falls  $n \in L$ . Damit folgt  $L = N$ , und es gilt  $A_k \subset A_n$  falls  $k \in A_n$ .

$A_n \subset A_k$  falls  $k \notin A_n$ :

Wir müssen zeigen, daß  $M_k \subset M_n$  falls  $k \in M_n$ . Es reicht zu zeigen, daß  $M_k = M_k \cap M_n$ . Dazu reicht es aufgrund der Eindeutigkeit zu zeigen, daß  $M'_k := M_k \cap M_n$  die charakteristischen Eigenschaften von  $M_k$  hat. Das folgt einfach:

$$k \notin M'_k : k \notin M_k$$

$\nu(k) \in M'_k$ :  $\nu(k) \in M_k$  und  $\nu(k) \in M_n$  (da  $k \in M_n$  und  $M_n$  der Eigenschaft (3) genügt).

$l \in M'_k \implies \nu(l) \in M'_k$ : klar (da es für beide Bestandteile von  $M'_k$  gilt).

Damit ist die Folgerung bewiesen.  $\square$

**Bemerkung.** (Uebung) Man kann zeigen, daß

$$x \leq y : \iff A_x \subset A_y$$

eine Ordnungsrelation auf  $N$  definiert und sogar eine Totalordnung. Bezüglich dieser Ordnungsrelation besteht dann  $A_n$  aus den Elementen 'kleiner oder gleich'  $n$  sind und  $M_n$  aus den Elementen die 'größer' als  $n$  sind. Bezüglich dieser Ordnungsrelation ist  $N$  wohlgeordnet, d.h. es gilt, daß jede nichtleere Teilmenge von  $N$  ein kleinstes Element besitzt. (Hinweise: Zur Antisymmetrie: Es muss gezeigt werden, dass  $y$  durch  $A_y$  bestimmt ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass  $y$  das einzige Element  $z$  ist mit  $z \in A_y$  und  $\nu(z) \in M_y$ . Dazu betrachtet man die Menge  $L$  aller  $y \in N$  mit dieser Eigenschaft. Dann gehört offenbar  $e$  zu  $L$ . Weiterhin gehört mit  $n$  auch  $\nu(n)$  zu  $L$ . Damit gilt die gewünschte Eigenschaft für alle  $y \in N$ . Zur Wohlgeordnetheit: Angenommen:  $M$  ist eine nichtleere Teilmenge von  $N$ , die kein kleinstes Element besitzt. Zeige dann durch Induktion, daß jedes  $A_n$  im Komplement von  $M$  liegt. Damit stimmt dieses Komplement mit  $N$  überein und  $M$  ist die leere Menge.)

Wir kommen nun zur rekursiven Definition (vgl.  $n!$  oben).

**Rekursive Definition von Funktionen.** Es genuege  $(N, e, \nu)$  den Peano Axiomen. Sei  $X$  eine Menge und für  $n \in N$  sei  $X^n$  die Menge der Abbildungen von  $A_n$  nach  $X$ . Seien  $a \in X$  sowie zu  $n \in N \setminus \{e\}$  Abbildungen  $V_n : X^n \longrightarrow X$  gegeben. Dann existiert eine eindeutige Funktion  $f : N \longrightarrow X$  mit

- $f(e) = a$
- $f(\nu(n)) = V_n(f|_{A_n})$ . Hier bezeichnet  $f|_{A_n}$  die Einschränkung von  $f$  auf  $A_n$  gegeben durch  $f|_{A_n} : A_n \longrightarrow X, x \mapsto f(x)$ .

**Bemerkung.** Das ist eine präzise Fassung von

$$X^n = \text{Menge der Tupel } (f(1), \dots, f(n))$$

und

$$f(1) = a, f(n+1) = V_n(f(1), \dots, f(n))$$

für alle  $n \in N$ .

*Beweis.* (Skizze) Wir zeigen zunächst die *Eindeutigkeit* eines solchen  $f$ : Seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei  $L := \{n \in N : f|_{A_n} = g|_{A_n}\}$ . Dann ist  $L$  induktiv (einfach) und muss also mit  $N$  übereinstimmen. Das liefert die Eindeutigkeit.

Wir kommen nun zur *Existenzaussage*. Sei  $\mathcal{A}(n)$  die Aussage:

$\mathcal{A}(n)$  Es existiert eine eindeutige Funktion  $f_n : A_n \rightarrow X$  mit  $f_n(e) = a$  und  $f_n(\nu(k)) = V_k(f_n|_{A_k})$  für  $k \in A_n$  mit  $\nu(k) \in A_n$ .

Wir zeigen zunächst durch Induktion, daß  $\mathcal{A}(n)$  für jedes  $n \in N$  wahr ist:

$n = e$ : klar. ( $f_e(e) = a$ .)

$n \implies \nu(n)$ :

*Existenz*: Definiere  $f_{\nu(n)}$  auf  $A_n$  durch  $f_n$  und setze es auf  $\nu(n)$  als  $V_n(f_n)$ . Dann hat  $f_{\nu(n)}$  die gewünschten Eigenschaften.

*Eindeutigkeit*: Das ist einfach. (Auf  $A_n$  haben wir keine Wahl, da  $\mathcal{A}(n)$  wahr ist, und auf  $\nu(n)$  ist der Funktionswert nach der Vorschrift festgelegt.)

Nun zeigen wir, daß die  $f_n$ ,  $n \in N$ , miteinander verträglich sind:

Seien  $k, n \in N$  gegeben. Dann gilt (s.o.)  $A_n \subset A_k$  oder  $A_k \subset A_n$ . Ohne Einschränkung  $A_n \subset A_k$ . Aufgrund der Eindeutigkeit müssen dann  $f_n$  und  $f_k$  auf  $A_n$  übereinstimmen. Damit kann man dann die  $f_n$  zu einem  $f$  auf  $N$  'zusammensetzen', indem man definiert

$$f : N \rightarrow X, f(n) := f_n(n).$$

Dieses  $f$  stimmt auf jedem  $A_n$  mit  $f_n$  überein und hat also die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

**Bemerkung.** Ähnlich wie man Funktionen rekursiv definieren kann, kann man auch Mengen rekursiv definieren (siehe Übung).

Damit können wir nun die schon angekündigte Eindeutigkeit der 'natürlichen Zahlen' beweisen.

**THEOREM.** (*Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen*) Es genügen  $(N_1, e_1, \nu_1)$  und  $(N_2, e_2, \nu_2)$  den Peano Axiomen. Dann gibt es eindeutige Abbildungen  $k : N_1 \rightarrow N_2$  und  $l : N_2 \rightarrow N_1$  mit

$$k(e_1) = e_2 \text{ und } k(\nu_1(n)) = \nu_2(k(n)) \text{ für alle } n \in N_1$$

bzw.

$$l(e_2) = e_1 \text{ und } l(\nu_2(n)) = \nu_1(l(n)) \text{ für alle } n \in N_2.$$

Es gilt  $l \circ k = id_{N_1}$  und  $k \circ l = id_{N_2}$ . Damit sind also  $l$  und  $k$  bijektiv.

**Zeichnung.** Kommutatives Diagramm.

*Beweis.* Wir widmen uns zunächst der Abbildung  $k$ :

*Existenz von  $k$* : Das folgt durch rekursive Definition.

*Eindeutigkeit von  $k$* : Seien  $k$  und  $k'$  Abbildungen mit der gewünschten Eigenschaft. Sei  $L := \{n \in N_1 : k(n) = k'(n)\}$ . Dann gilt nach

Definition  $e_1 \in L$  und  $n \in L$  impliziert  $\nu_1(n) \in L$  da

$$k(\nu_1(n)) = \nu_2(k(n)) = \nu_2(k'(n)) = k'(\nu_1(n)).$$

Damit folgt  $L = N_1$  aus dem zweiten Peanoaxiom.

Analog können wir Existenz und Eindeutigkeit von  $l$  beweisen.

Wir zeigen nun  $l \circ k = id_{N_1}$ : Sei  $S := \{n \in N_1 : l \circ k(n) = n\}$ . Dann folgt ähnlich wie eben, daß  $S = N_1$ .

Die Aussage  $k \circ l = id_{N_2}$  lässt sich analog beweisen.  $\square$

**!!! Die gute Nachricht!!!** Das vorangehende Theorem zeigt, daß es (bis auf Umbenennung) nur ein Triple  $(N, e, \nu)$  gibt, das den Peano Axiomen genügt. Wir bezeichnen dieses eindeutige Tripel ab jetzt als die natürlichen Zahlen und verwenden das Symbol  $\mathbb{N}$ . Weiterhin schreiben wir dann (meist) 1 statt  $e$  und fuer den Nachfolger von 1 schreiben wir 2.

**Bemerkung.** In gewissen Fällen wird es praktisch sein, noch ein weiteres Element 0 zur Verfügung zu haben und mit  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  zu arbeiten. Auf  $\mathbb{N}_0$  zeichnen wir das Element 0 aus und definieren die Nachfolge Abbildung  $\nu_0$  auf  $N$  wie bisher und  $\nu_0(0) = 1$ . Dann erfüllt  $(\mathbb{N}_0, 0, \nu_0)$  die Peanoaxiome. (Klar!)

Da die Peano Axiome das Tripel eindeutig bestimmen, legen sie auch die Mengen  $A_n$  und  $M_n$  (bis auf Umbenennung) eindeutig fest. Damit ist folgende Definition moeglich.

**DEFINITION** (Endliche Menge). *Eine Menge  $X$  heißt endlich, wenn sie leer ist oder ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert und eine bijektive Abbildung  $j : A_n = \{1, \dots, n\} \longrightarrow X$ . Dann heißt 0 bzw.  $n$  die Mächtigkeit oder Kardinalität oder Anzahl der Elemente von  $X$  und man nennt  $X$  auch  $n$ -elementig. Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.*

**Bemerkungen.**

- Die Definition von 'n-elementig' ist sinnvoll, da fuer  $n \neq m$  die Mengen  $A_n$  und  $A_m$  nicht gleichviele Elemente haben. Letzteres kann man wie folgt zeigen: Fuer  $n \neq m$  sind  $A_n$  und  $A_m$  verschieden (da  $x$  durch  $A_x$  festgelegt ist nach einer obigen Bemerkung) und es gilt  $A_n \subset A_m$  oder  $A_m \subset A_n$  (vgl. eine obige Folgerung). Damit ist fuer  $n \neq m$  dann  $A_n$  eine echte Teilmenge von  $A_m$  oder umgekehrt. Damit folgt die gewünschte Aussage.
- Wir werden spaeter sehen, daß es verschieden 'große' unendliche Mengen geben kann.

Wir können nun  $\mathbb{N}$  mit einer Addition und einer Multiplikation versehen gemäß:

**Addition :  $n + m$ :** Für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Abbildung  $S_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  rekursiv gemäß

$$S_n(1) = \nu(n) \text{ und } S_n(\nu(m)) := \nu(S_n(m)).$$

Dann liefert  $S_n(m)$  eine präzise Fassung des bisher nicht definierten  $n + m$  d.h. wir definieren

$$n + m := S_n(m).$$

Damit gilt dann  $\nu(n) = n + 1$ .

**Multiplikation :  $kn$ :** Für jedes feste  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Abbildung  $M_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  rekursiv gemäß

$$M_n(1) = n \text{ und } M_n(\nu(m)) := M_n(m) + n.$$

Wir setzen  $kn := M_n(k)$ .

Weiterhin setzen wir  $0 + n = n = n + 0$  sowie  $0n = n0 = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Es ist dann möglich zu zeigen, daß Addition und Multiplikation den üblichen Regeln genügen. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt sehr genau (auf andere Art) eingehen.

Hier diskutieren wir aber schon kurz eine **Subtraktion**:

Zu jedem  $k \in A_n \cup \{0\}$  existiert ein eindeutiges  $m \in N_0$  mit  $k + m = n$ . Wir schreiben dann auch  $n - k$  für  $m$ .

Bew. Sei  $L$  die Menge der  $n \in N_0$  für die  $A_n$  die behauptete Eigenschaft hat. Dann gehört  $0$  zu  $L$ . (Denn  $0 + 0 = 0$  und  $0 + n = n \neq 0$  für alle  $n \in N$ ). Weiterhin gehört mit  $n$  auch  $\nu(n)$  zu  $L$ : (Übung. Sei  $k \in A_{\nu(n)}$ . Zu zeigen Existenz und Eindeutigkeit eines  $m$  mit  $k + m = \nu(n)$ ).

*Existenz:* Falls  $k \in A_n$ , gibt es  $m'$  mit  $k + m' = n$  und wir wählen  $m := \nu(m')$ . Falls  $k = \nu(n)$  setzen wir  $m := 0$ .

*Eindeutigkeit:* Es gelte  $k + m = \nu(n)$ . Ist  $m = 0$  so folgt  $k = \nu(n)$ . Damit ist dann  $m = 0$  die einzige Lösung (denn  $k + n \in M_k$  wie eine einfache Induktion zeigt und  $M_k$  enthält  $k$  nicht.)

Andernfalls ist  $m$  ein Nachfolger, also  $m = \nu(l)$ . Dann gilt  $k + \nu(l) = \nu(n)$ , also  $\nu(k + l) = \nu(n)$  also  $k + l = n$ . Wegen  $n \in L$  ist dann  $l$  eindeutig bestimmt und damit auch  $m = \nu(l)$ .

Hier geben wir noch einige Anwendungen:

- Die Funktion  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto n!$  ( $n$ -Fakultät) wird definiert durch

$$1! = 1 \text{ und } (n + 1)! = (n + 1)n!.$$

Damit ist sinngemäß  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ . Zweckmässig:  $0! = 1$ .

- Für  $a \in \mathbb{N}$  wird die Funktion  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto a^n$  definiert durch

$$a^1 := a, \quad a^{n+1} := a \cdot a^n.$$

Zweckmässig:  $a^0 := 1$ .

- Die Anzahl der Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge ist gerade  $2^n$ . (vgl. Übung)

Bew.  $n = 1$ : Es gibt zwei Teilmengen: die leere Menge und gesamte Menge.

$n \implies n + 1$ : Sei eine Menge  $M$  mit  $n + 1$  Elementen gegeben. Sei  $p$  ein Element von  $M$ . Dann gibt es genausoviele Teilmengen, die  $p$  enthalten, wie Teilmengen die  $p$  nicht enthalten (!). Es gibt  $2^n$  Teilmengen von  $M$ , die  $p$  nicht enthalten (also Teilmengen der  $n$ -elementigen Menge  $M \setminus \{p\}$  sind). Insgesamt gibt es also  $2 \times 2^n = 2^{n+1}$  Teilmengen. (Zeichnung:  $n$  weiße Kugeln und eine schwarze Kugel.)

←  
Ende der 3. Vorlesung.

Mittels Rekursiver Definition können wir auch  $\sum$  und  $\prod$  definieren. Das wird später oft nützlich sein. Daher gehen wir nun darauf ein.

### Definition von $\prod$ :

Ziel: Präzise Version von  $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \dots a_n$ .

Sei  $K$  eine Menge mit einer Verknüpfung  $\cdot$  (Beispiel:  $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ). Seien  $a_n \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gegeben. Wir definieren dazu den Ausdruck  $\prod_{k=1}^n a_k$  rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^1 a_k := a_1 \text{ und } \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left( \prod_{k=1}^n a_k \right) a_{n+1}.$$

(Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow K$ ,  $f(n) := \prod_{k=1}^n a_k$ , wird also durch die Bedingungen  $f(1) = a_1$  und  $f(n+1) = f(n)a_{n+1} =: V_n(f_{A_n})$  festgelegt.)

Spezialfall: Sind alle  $a_k = q \in K$  so setzt man

$$q^n := \prod_{k=1}^n q.$$

Dann gilt also

$$q^1 = q, q^{n+1} = qq^n.$$

### Definition von $\sum$ :

Ziel: Präzise Version von  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ .

Sei  $K$  eine Menge mit einer Verknüpfung  $+$  (Beispiel:  $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ). Seien  $a_n \in K$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gegeben.

Wir definieren dazu den Ausdruck  $\sum_{k=1}^n a_k$  rekursiv durch

$$\sum_{k=1}^1 a_k := a_1 \text{ und } \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}.$$

(Die Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow K$ ,  $f(n) = \sum_{k=1}^n a_k$  wird also durch die Bedingungen  $f(1) = a_1$  und  $f(n+1) = f(n) + a_{n+1} =: V_n(f_{A_n})$  festgelegt.)



Spezialfall: Sind alle  $a_k = q \in K$  so setzt man

$$nq := \sum_{k=1}^n q.$$

Dann gilt also

$$1q = q, (n + 1)q = q + nq.$$

## KAPITEL 2

### Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind charakterisiert durch das Zusammenspiel von drei Strukturen:

- Körperaxiome ('Arithmetik')
- Anordnungsaxiome (' $\leq$ ')
- Vollständigkeitsaxiom ('Existenz von Suprema und Infima')  
(Liefert Existenz von Grenzwerten)

Die natürlichen Zahlen lassen sich als Teilmengen der reellen Zahlen auffassen und erben entsprechend Arithmetik und Anordnung. Darum geht es in diesem Kapitel. Insbesondere werden wir dabei folgende Zeichnung rechtfertigen:

**Zeichnung.** Linie mit

- 0 und Spiegelung (für Inversion im Körper),
- Positiv- und Negativteil (für Ordnung)
- ohne Lücken (für Vollständigkeit).

sowie

- natürlichen Zahlen.

#### 1. Die Körperstruktur

Die reellen Zahlen mit Multiplikation und Addition sind ein Körper:

**DEFINITION.** (*Körper*) Eine Menge  $K$  zusammen mit den Verknüpfungen

$$K \times K \longrightarrow K, (x, y) \mapsto x + y \text{ (Addition)}$$

und

$$K \times K \longrightarrow K, (x, y) \mapsto x \cdot y \text{ (Multiplikation)}$$

heißt Körper, wenn folgende Axiome gelten:

*Axiome der Addition:*

- (A1) *Assoziativgesetz:*  $x + (y + z) = (x + y) + z$  für alle  $x, y, z \in K$ .
- (A2) *Kommutativgesetz:*  $x + y = y + x$  für alle  $x, y \in K$ .
- (A3) *Existenz der 0:* Es gibt ein  $0 \in K$  mit  $x + 0 = x$  für alle  $x \in K$ .
- (A4) *Existenz des Negativen:* Zu jedem  $x \in K$  existiert ein  $-x \in K$  mit  $x + (-x) = 0$ .

*Axiome der Multiplikation:*

- (M1) *Assoziativgesetz:*  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  für alle  $x, y, z \in K$ .
- (M2) *Kommutativgesetz:*  $x \cdot y = y \cdot x$  für alle  $x, y \in K$ .

(M3) *Existenz der 1: Es gibt ein  $1 \in K$  mit  $1 \neq 0$  und  $x \cdot 1 = x$  fuer alle  $x \in K$ .*

(M4) *Existenz des Negativen: Zu jedem  $x \in K$  mit  $x \neq 0$  existiert ein  $x^{-1} \in K$  mit  $xx^{-1} = 1$ .*

*Distributivgesetz:*

(D1) *Distributivgesetz:  $x(y + z) = xy + xz$  fuer alle  $x, y, z \in K$ .*

**Bemerkung.** Man kann diese Definition auch so fassen:  $(K, +)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0.  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1. Es gilt das Distributivgesetz  $x(y+z) = xy+xz$  fuer alle  $x, y, z \in K$ . Wir nennen 0 das *neutrale Element der Addition* und 1 das *neutrale Element der Multiplikation*.

**Notation.** Wir schreiben  $x - y$  statt  $x + (-y)$  und  $x/y$  statt  $x \cdot y^{-1}$  (fuer  $y \neq 0$ ) und  $xy$  statt  $x \cdot y$ .

**Beispiel - (Kleinster Körper)**  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  mit Addition  $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$  und Multiplikation  $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$  und  $00 = 0$  ist ein Körper. Es handelt sich gerade um das 'Rechnen modulo zwei'. Dabei steht 1 fuer alle ganzen Zahlen, deren Rest bei Division durch gerade 1 ist (ungerade Zahlen) und 0 fuer alle ganzen Zahlen, deren Rest bei Division durch 2 gerade 0 ist (gerade Zahlen). Die Rechenregeln lassen sich dann verstehen als *gerade + gerade = gerade, gerade + ungerad = ungerade....* Allgemeiner liefert Rechnen modulo  $N$  einen Körper, falls  $N$  eine Primzahl ist (siehe Algebra).

'Beispiele.'  $\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ .

**PROPOSITION.** (*Charakteristische Eigenschaften des Inversen*) Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Dann gilt:

(a)  $y - x$  ist die eindeutige Lösung  $z$  von  $x + z = y$ . Insbesondere sind das Inverse bzgl. der Addition zu einem  $x$  und das neutrale Element der Addition eindeutig bestimmt. Gilt  $x + y = 0$  fuer  $x, y \in K$  so ist  $x = -y$  und  $y = -x$ . Insbesondere ist also  $x = -(-x)$ .

(b)  $x/y$  ist die eindeutige Lösung  $z$  von  $zy = x$ . Insbesondere ist das Inverse bzgl. der Multiplikation zu einem  $y \neq 0$  und das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt. Gilt  $xy = 1$  fuer  $x, y \in K$ , so gilt  $x = y^{-1}$  und  $y = x^{-1}$ . Insbesondere ist dann also  $x = (x^{-1})^{-1}$ .

*Beweis.* (a) *Lösung:*  $x + (y - x) = (y - x) + x = y + (-x + x) = y + 0 = y$ .  
*Eindeutig:*  $x = y + z \implies x - y = (y + z) - y = -y + (y + z) = (-y + y) + z = 0 + z = z$ .

*Eindeutigkeit des Inversen der Addition:*  $-x$  loest  $x + (-x) = 0$ .

*Eindeutigkeit des neutralen Elementes der Addition 0:* Es löst 0 die Gleichung  $x + 0 = x$ .

Zu  $x + y = 0$ : Nach Konstruktion gilt  $x + (-x) = 0$  und  $(-y) + y = 0$ . Aus der Eindeutigkeit der Loesung folgt dann also  $y = -x$  und  $-y = x$ . Damit folgt dann  $x = -y = -(-x)$ .

(b) ähnlich wie (a). □

**PROPOSITION.** (*Rechnen mit 0 und 1*) Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Dann gilt:

(a) Es gilt  $0 = -0$  und  $1 = 1^{-1}$ .

(b)  $0x = 0$  für alle  $x \in K$ .

(c)  $(-1)x = -x$  für alle  $x \in K$ .

(d)  $(-x)(-y) = xy$  für alle  $x, y \in K$ .

*Beweis.*

(a) Es gilt  $0 = 0 + 0$  und  $1 = 1 \cdot 1$ . Damit folgt die Aussage aus der vorigen Proposition.

(b)  $0x = (0+0)x = 0x+0x$ . Nun Addieren von  $-0x$  auf beiden Seiten...

(c) Es ist zu zeigen, daß  $z := (-1)x$  das Inverse von  $x$  (bzgl. Addition) ist:

$$z + x = (-1)x + x = (-1)x + 1x = (-1 + 1)x = 0x = 0 \text{ (nach (c)).}$$

(d) Übung. □

**FOLGERUNG.** (*Vertauschen der Inversionen*) Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Dann ist für jedes  $x \neq 0$  auch  $-x \neq 0$  und es gilt  $(-x)^{-1} = -x^{-1}$ .

*Beweis.* Für  $x \neq 0$  gilt auch  $-x \neq 0$  (sonst  $x = x + 0 = x + (-x) = 0$  Widerspruch). Weiterhin gilt

$$(-x)(-x^{-1}) = (-x)(-1)(x^{-1}) = (-1)(-x)x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

Damit folgt (s.o.)  $(-x)^{-1} = -x^{-1}$ . □

**Bemerkung.** (Uebung) Man kann nun folgende wohlbekannte Aussagen (Bruchrechnung) zeigen:

(a) Für  $x, y \neq 0$  gilt  $(xy)y^{-1}x^{-1} = 1$  und insbesondere  $xy \neq 0$ .

(b) Für  $y, w, v \neq 0$  gilt

$$\frac{x}{y} \frac{v}{w} = \frac{xv}{yw}, \quad \frac{x}{y} + \frac{v}{w} = \frac{xw + yv}{yw}, \quad \frac{x}{y} / \frac{v}{w} = \frac{xw}{yv}.$$

**Bemerkung.** Ist  $(K, +, \cdot)$  ein Körper und  $x \in K$  mit  $x \neq 0$ , so liefert rekursive Definition eine eindeutige Abbildung

$J : \mathbb{N} \longrightarrow K$  mit  $J(1_{\mathbb{N}}) = x$  und  $J(n + 1_{\mathbb{N}}) = J(n) + x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir definieren dann:  $n \cdot x := J(n)$ .

**Beispiel.** Sei  $K = \mathbb{F}_2$  und  $x = 1$ . Dann gilt für  $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F}_2$ ,  $n \mapsto n1_{\mathbb{F}_2}$

$$J(n) = 0 \text{ falls } n \text{ gerade d.h. } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}$$

und

$$J(n) = 1 \text{ falls } n \text{ ungerade d.h. } n = 2k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Die folgenden beiden wichtigen Formeln gelten in jedem Körper.

**PROPOSITION.** (*Geometrische Summenformel*) Sei  $K$  ein Körper und  $x, y \in K$  mit  $x \neq y$ . Dann gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(n-1)-k} = \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{(n-1)-k}.$$

Inbesondere gilt für  $q \neq 1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  die Formel

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

*Beweis.* Wir rechnen

$$\begin{aligned} (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(n-1)-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{(n-1)-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ (\text{Teleskopsumme}) &= \sum_{k=1}^n x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ &= x^n - y^n. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt durch Vertauschen von  $x$  und  $y$ . Das 'Inbesondere' folgt mit  $x = 1$  und  $y = q \neq 1$ .  $\square$

**Bemerkung.** Man kann die geometrische Summenformel auch durch Induktion beweisen. (Übung).

**PROPOSITION.** (*Binomischer Satz*) Sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$  und  $x, y \in K$ . Dann gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

mit

$\binom{n}{k} :=$  Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$  elementigen Menge.

Diese Zahlen  $\binom{n}{k}$  erfüllen die Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

*Beweis.* Die Rekursionsformel folgt direkt: Sei eine  $n + 1$  elementige Menge gegeben. Sei ein Element  $p$  aus dieser Menge fixiert. Dann gibt es  $\binom{n}{k-1}$   $k$ -elementige Teilmengen die  $p$  enthalten und  $\binom{n}{k}$   $k$ -elementige Teilmengen, die  $p$  nicht enthalten. (Zeichnung:  $n$  weiße Kugeln und eine schwarze Kugel...)

Nun folgt die Aussage über  $(x + y)^n$  durch Induktion:

$n = 1$ : Klar.

$n \implies (n + 1)$ : Direkte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n \\ A(n) &= (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \end{aligned}$$

(Dabei folgt die letzte Gleichung aus der Induktionsannahme für  $n$ .)

Damit können wir weiter rechnen

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ (k \rightarrow k-1) &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ (\text{Rekursion}) &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

← Ende der 5. Vorlesung

**Bemerkung.** (a) Alternative Deutung: 'Ausmultiplizieren' von

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y) \cdots (x + y)$$

und bestimmen, wie oft  $x^k y^{n-k}$  vorkommt.

(b) Es gilt  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . (Bew. Induktion und Rekursionsformel. Beachte dabei, daß man zunächst dem Quotienten  $a/b$  für natürliche Zahlen einen Sinn geben muss, etwa durch  $a/b = c$  genau dann wenn  $c \in \mathbb{N}$  die Gleichung  $bc = a$  erfüllt.)

## 2. Die Ordnungsstruktur

Wir kommen nun zu einer weiteren Struktur auf  $\mathbb{R}$ , der Ordnungsstruktur.

**DEFINITION.** Ein Körper  $K$  zusammen mit einer ausgezeichneten Menge  $K^+$ , den sogenannten positiven Elementen, heißt angeordnet, wenn die folgenden Eigenschaften (Ordnungsaxiome) gelten:

- (O1)  $K = K^+ \cup \{0\} \cup \{-x : x \in K^+\}$ , wobei die Vereinigung disjunkt ist.
- (O2)  $x, y \in K^+$  impliziert  $x + y \in K^+$ .
- (O3)  $x, y \in K^+$  impliziert  $xy \in K^+$ .

Die Elemente  $x \in K$  mit  $-x \in K^+$  heissen dann negativ. Die Elemente aus  $K^+ \cup \{0\}$  heissen auch nicht negativ.

**Bemerkungen.** (a) ' $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$ ' sind angeordnet (s.u.)

(b)  $\mathbb{F}_2$  lässt sich nicht anordnen. (Denn  $1 = -1$ .)  $\mathbb{C}$  lässt sich nicht anordnen.

Wir ziehen schon einmal eine einfache Folgerung aus (O1):

**FOLGERUNG.** In einem angeordneten Körper gilt fuer  $x \neq 0$  entweder  $x \in K^+$  oder  $-x \in K^+$ .

*Beweis.* Es muß nach (O1) entweder gelten  $x \in K^+$  oder  $x \in \{-h : h \in K^+\}$ . Es ist  $x = -h$  fuer  $h \in K^+$  äquivalent zu  $-x = h \in K^+$ .  $\square$

**Notation.**  $K$  angeordneter Körper. Wir schreiben

$x > y$  (lies 'x größer als y') oder  $y < x$  (lies: 'y kleiner als x') falls  $x - y \in K^+$ .

$x \geq y$  (lies 'x grösser gleich y') oder  $y \leq x$  (lies: 'y kleiner gleich x') falls  $x - y \in K^+ \cup \{0\}$ .

**FOLGERUNG.** ( $\leq$  liefert eine totale Ordnung) Sei  $K$  ein angeordneter Körper.

(a) Sind  $x, y, z \in K$  mit  $x \leq y$  und  $y \leq z$  so gilt  $x \leq z$ .

(b) Gilt für  $x, y \in K$  sowohl  $x \leq y$  als auch  $y \leq x$  so folgt  $x = y$ .

(c) Für  $x, y \in K$  gilt dann genau eine der drei folgenden Aussagen:

- $x < y$ .
- $y < x$ .
- $x = y$ .

*Beweis.* (a) Zu zeigen  $z - x \in K^+ \cup \{0\}$ . Das folgt aus (O2) in folgender Weise:

$$z - x = z + (-y + y) - x = (z - y) + (y - x) \in K^+ \cup \{0\}.$$

(b) Für  $x, y$  mit  $x \leq y$  und  $y \leq x$  gilt  $x - y \in K^+ \cup \{0\}$  und  $y - x \in K^+ \cup \{0\}$ . Damit folgt

$$x - y \in (K^+ \cup \{0\}) \cap (\{-z : z \in K^+\}) \cup \{0\} = \{0\}.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus (O1).

(c) Das ist lediglich eine Umformulierung von (O1).  $\square$

**Bemerkung.** Die vorige Proposition besagt, daß jede Anordnung auch eine Ordnung liefert. Tatsächlich ist eine Anordnung 'mehr' als eine Ordnung (s.u.).

Wir untersuchen nun wie die Anordnung mit Bilden des Inversen verträglich ist.

PROPOSITION. (*Inversion und Quadrate*) Sei  $K$  ein angeordneter Körper.

Dann gilt:

(a)  $x < y \iff -x > -y$ . Insbesondere  $x < 0 \iff -x > 0$ .

(b)  $x \in K^+ \iff x^{-1} \in K^+$ .

(c)  $x^2 \in K^+$  für alle  $x \neq 0$ . Insbesondere  $1 = 1 \cdot 1 > 0$ .

*Beweis.*

(a)  $x < y$  bedeutet gerade  $y - x \in K^+$ ;  $-x > -y$  bedeutet gerade  $-x + y \in K^+$ . Das 'Insbesondere' folgt mit  $x = x$  und  $y = 0$  unter Beachten von  $0 = -0$ .

(b)  $x \in K^+$ , insbesondere  $x \neq 0$ . Angenommen  $x^{-1} \notin K^+$ . Dann  $-x^{-1} \in K^+$ . Damit  $-1 = x(-x^{-1}) \in K^+$ . Damit  $1 = (-1)(-1) \in K^+$ . Also  $1 \in K^+$  und  $(-1) \in K^+$ . Widerspruch zu (O1).

(c) folgt aus  $x^2 = xx = (-x)(-x)$ , da für  $x \neq 0$   $x \in K^+$  oder  $-x \in K^+$  gilt.

□

Wir kommen nun zu einigen nützlichen Rechenregeln. Diese werden insbesondere zeigen, daß wir Ungleichungen addieren und (unter geeigneten Voraussetzungen) auch multiplizieren dürfen.

PROPOSITION. (*Rechenregeln*) Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann

gilt:

(a)  $x < y, x' \leq y' \implies x + x' < y + y'$ .

(b)  $a < b$  und  $x > 0 \implies ax < bx$

(c)  $a < b$  und  $x < 0 \implies ax > bx$ .

(d)  $0 < a < b$  und  $0 < x < y \implies ax < by$ .

(e)  $0 < x < y \iff 0 < y^{-1} < x^{-1}$ .

*Beweis.* (a) ähnlich wie (a): Es gilt nach (O2):

$$(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in K^+.$$

(b)  $bx - ax = (b - a)x \in K^+$ .

(c)  $a < b$  bedeutet  $b - a \in K^+$ .  $x < 0$  liefert  $-x \in K^+$  nach voriger Proposition. Damit gilt also

$$ax - bx = (a - b)x = (-1)(a - b)(-1)x = (b - a)(-x) \in K^+.$$

(d)  $by - ax = by - bx + bx - ax = b(y - x) + x(b - a) \in K^+$ .

(e)  $\implies$ : Nach vorangegangener Proposition gilt  $x^{-1}, y^{-1} \in K^+$ . Damit können wir  $0 < x < y$  mit  $x^{-1}y^{-1}$  'Durchmultiplizieren' und erhalten die Behauptung.

Die umgekehrte Richtung folgt dann durch Ersetzen von  $x$  durch  $x^{-1}$  und  $y$  durch  $y^{-1}$ . □

FOLGERUNG.  $0 \leq x < y, k \in \mathbb{N} \implies 0 \leq x^k < y^k$ .



In allen angeordneten Körper gilt die folgende Bernoulli Ungleichung. Um sie zu formulieren, erinnern wir noch einmal an folgendes: In einem Körper  $K$  können wir  $nx$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in K$  rekursiv definieren durch  $1_{\mathbb{N}}x = x$  und  $(n + 1_{\mathbb{N}})x := nx + x$ .

**PROPOSITION.** (*Bernoulli Ungleichung*) Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann gilt für  $x \geq -1$  und  $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

*Beweis.* Induktion nach  $n$ .

$$n = 1: 1 + x = 1 + x.$$

$$n \implies n + 1:$$

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \\ (A(n), 1 + x \geq 0) &\geq (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + (n + 1)x + x(nx) \end{aligned}$$

$$\text{(Kleine Induktion zwischendurch ;-)} = 1 + (n + 1)x + nx^2$$

$$\text{(Kleine Induktion zwischendurch ;-)} \geq 1 + (n + 1)x.$$

Zu den kleinen Induktionen zwischendurch: Für jedes  $x$  gilt

$$x(nx) = nx^2 \geq 0.$$

Bew. Induktion:  $n = 1: x(1_{\mathbb{N}}x) = xx = x^2 \geq 0$ . Dabei folgt die letzte Ungleichung aus dem oben gezeigten.

$n \implies n + 1: x((n + 1)x) = x(nx + x) = x(nx) + xx = nx^2 + x^2 = (n + 1)x^2$ . (Dabei: erste Gleichung: Rekursive Definition von  $(n + 1)x$ ; zweite Gleichung: Distributivgesetz; dritte Gleichung: Gültigkeit der Aussage für  $n$ ; vierte Gleichung: Rekursive Definition von  $(n + 1)x^2$ .) Es gilt  $x((n + 1)x) = nx^2 + x^2 \geq 0$  aufgrund der Ordnungsaxiome, da es sich um eine Summe von zwei nichtnegativen Termen handelt. (Der erste Term ist nichtnegativ aufgrund der Gültigkeit der Aussage für  $n$ ; der zweite Term ist nichtnegativ wie oben gezeigt wurde).  $\square$

**Bemerkungen.** (a) Für  $x \geq 0$  folgt das natürlich aus dem binomischen Satz. Denn  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$  hat nur nichtnegative Summanden.

(b) Wie ist die Lage für  $-2 \leq x \leq -1$ ? (Übung)

←-----  
Ende der 6. Vorlesung

In einem angeordneten Körper können wir den Betrag definieren durch

$$|\cdot| : K \longrightarrow K^+ \cup \{0\}, |x| := \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0. \end{cases}$$

Der Betrag beschreibt so etwas wie eine Länge. Das Bilden des Betrages ist in gewisser Weise mit Addition und Multiplikation verträglich:

PROPOSITION. (*Betrag und Multiplikation*) Ist  $K$  ein angeordneter Körper, so gilt für alle  $x, y, z \in K$

- $|z| = |-z|$
- $|1/x| = 1/|x|$  (falls  $x \neq 0$ ).
- $|xy| = |x||y|$

*Beweis.* Es gilt  $|z| = |-z|$ . Das folgt leicht durch Fallunterscheidung. Es gilt  $|1/x| = 1/|x|$ . Das ist klar für  $x > 0$ . Für  $x < 0$  gilt  $-x > 0$  und  $x^{-1} < 0$  und damit

$$1/|x| = |x|^{-1} = |-x|^{-1} = (-x)^{-1} \stackrel{s.o.}{=} -x^{-1} = |x^{-1}| = |1/x|.$$

Es gilt  $|xy| = |x||y|$ . Gilt  $x = 0$  oder  $y = 0$ , so folgt die Aussage sofort. Die übrigen Fälle folgen einfach durch Fallunterscheidung (4 Fälle). Etwa:

$x > 0, y > 0$ : Dann gilt  $xy > 0$  und damit  $|xy| = xy = |x||y|$ .

$x < 0, y > 0$ : Dann gilt  $-y > 0$ . Damit folgt unter Anwendung des schon gezeigten:

$$|xy| = |(-1)xy| = |x(-y)| = |x||-y| = |x||y|.$$

etc. □

PROPOSITION. (*Dreiecksungleichung*) Ist  $K$  ein angeordneter Körper, so gilt für alle  $x, y, z \in K$

$$|z| = |-z| \text{ und } -|z| \leq z \leq |z|$$

und

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

also insbesondere

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \text{ (2. Dreiecksungleichung)}.$$

*Beweis.*  $-|z| \leq z \leq |z|$ : Für  $z = 0$  ist die Aussage klar. Für  $z > 0$  folgt die Aussage leicht. Für  $z < 0$  können wir  $-z$  betrachten und erhalten die Aussage.

Es gilt  $|x + y| \leq |x| + |y|$ : Reicht z.z.  $x + y \leq |x| + |y|$  und  $-(x + y) \leq |x| + |y|$ .

Nun gilt aber aufgrund des schon gezeigten:  $x, -x \leq |x|$  und  $y, -y \leq |y|$ . Addieren unter Verwendung der Rechenregeln liefert die Aussage.

Zum 'Insbesondere': Aus  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$  folgt  $|x| - |y| \leq |x - y|$  ähnlich folgt auch  $|y| - |x| \leq |y - x|$ . □

Die Ordnungsstruktur erlaubt es auch von Minima und Maxima einer Menge zu sprechen: Sei  $M$  eine Menge in  $K$ . Ein  $x \in K$  heißt Maximum / Minimum von  $M$ , wenn gilt:

- $x \in M$ .
- Für jedes  $y \in M$  gilt  $y \leq x$  /  $y \geq x$ .

Man kann sich leicht (wie?) klarmachen, dass ein solches Maximum / Minimum eindeutig ist (wenn es überhaupt existiert). Man schreibt dann  $\max M$  bzw.  $\min M$  fuer das Maximum bzw. Minimum von  $M$ .

Wir beenden diesen Abschnitt, in dem wir die Existenz von Maxima und Minima ueber endliche Mengen zeigen: Ist  $M$  eine Menge in  $K$  mit einem Element,  $m$ , so definieren wir  $\max M = m$  und  $\min M = m$ . Sei nun  $M$  eine Menge in  $K$  mit  $n + 1$  Elementen, also  $M = M' \cup \{m\}$  mit einer  $n$  elementigen Menge  $M'$ . Dann definieren wir  $\max M$  durch  $\max M := m$  falls  $m \geq \max M'$  und  $\max M := \max M'$  falls  $m < \max M'$  und  $\min M$  durch  $\min M = m$  falls  $m \leq \min M'$  und  $\min M = \min M'$  falls  $m > \min M'$ . Man kann dann leicht sehen, daß die so definierten Elemente gerade die charakteristische Eigenschaft von Maximum bzw. Minimum haben.

### 3. Ordnungsvollständigkeit

Wir kommen nun zur dritten Eigenschaft der reellen Zahlen, der Ordnungsvollständigkeit. Auf dieser Eigenschaft beruhen die Aussagen über Grenzwerte in der Analysis.

**DEFINITION.** (*Beschränkte Mengen*) Sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $M \subset K$  nichtleer.

- (a) Es heißt  $S \in K$  eine obere/untere Schranke von  $M$ , wenn  $m \leq S$  /  $m \geq S$  für alle  $m \in M$ .
- (b) Hat  $M$  eine obere/untere Schranke, so heißt  $M$  nach oben / unten beschränkt. Hat  $M$  obere und untere Schranke, so heißt  $M$  beschränkt.

Wir fragen nun nach kleinsten oberen / größten unteren Schranken.

**DEFINITION.** Sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $M$  eine nach oben / unten beschränkte Menge in  $K$ . Eine obere / untere Schranke  $S$  von  $M$  heißt dann Supremum / Infimum, wenn für jede weitere obere / untere Schranke  $S'$  gilt  $S \leq S'$  /  $S \geq S'$ .

**Bemerkung.** (a) Das Supremum/Infimum einer beschränkten Menge muss nicht existieren (so hat zum Beispiel in  $\mathbb{Q}$  die Menge  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$  keine Supremum. siehe Übung.).

- (b) Wenn ein Supremum / Infimum existiert, ist es eindeutig:  
(Bew.  $S, S'$  Suprema von  $M$ . Dann gilt  $S \leq S'$  und  $S' \leq S$  also  $S = S'$ .)
- (c) Gehört das Supremum / Infimum zu der Menge, so handelt es sich um das Maximum bzw. Minimum.

**Notation.** Wir schreiben  $\sup M$  bzw.  $\inf M$  für das Supremum bzw. Infimum einer Menge (falls existent).

**PROPOSITION.** (*Charakterisierung Supremum*) Sei  $K$  ein angeordneter Körper und Menge eine Menge in  $K$ . Das Supremum der Menge  $M$  ist dadurch charakterisiert, daß gilt

- $m \leq S$  für alle  $m \in M$ . ( $S$  ist obere Schranke)
- Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $m \in M$  mit  $S - \varepsilon < m$ . (Jede kleinere Zahl ist NICHT Schranke d.h. jede Schranke ist mindestens  $S$ )

Für das Infimum gilt entsprechendes (!).

*Beweis.* Das ist eigentlich nur eine einfache Umformulierung der Definitionen: Es ist  $S$  Supremum von  $M$ , wenn es eine obere Schranke von  $M$  ist und jede weitere obere Schranke nicht kleiner als  $S$  ist. Das bedeutet, daß  $S$  Supremum ist, wenn es eine obere Schranke ist und jede kleinere Element nicht obere Schranke ist.  $\square$

Damit können wir nun zur dritten Eigenschaft der reellen Zahlen kommen.

**DEFINITION.** Ein angeordneter Körper heißt *ordnungsvollständig*, wenn jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt und jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum besitzt.

**Bemerkung.** Besitzt in einem angeordneten Körper jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum, so besitzt auch jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum. (Übung. Nutzt  $\inf M = -\sup(-M)$ ).

#### 4. Die Charakterisierung

**THEOREM.** (Charakterisierung von  $\mathbb{R}$ ). Es gibt (bis auf Umbenennung) genau einen angeordneten, ordnungsvollständigen Körper. Dieser Körper wird mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet und die reellen Zahlen genannt.

*Beweis.* Es ist Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen. Wir geben nur eine sehr grobe Skizze:

*Existenz.* Natürliche Zahlen werden mit Addition und Multiplikation versehen; dann Grothendieck Konstruktion für  $(\mathbb{N}, +)$ . Das liefert  $(\mathbb{Z}, +)$ . Tatsächlich kann man auch die Multiplikation fortsetzen in der offensichtlichen Weise. Nun Grothendieck Konstruktion auf  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ . Das liefert  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ . Tatsächlich kann man auch die Addition fortsetzen. Das liefert  $(\mathbb{Q}, \cdot, +)$ . Nun Vervollständigen.

*Eindeutigkeit.* Konstruiere Abbildung von  $\mathbb{Q}$  in die rationalen Zahlen des Vergleichkörpers. Setze diese Abbildung fort.  $\square$

← Ende der 7. Vorlesung →

**Zeichnung.** Linie, 0, positive, negative Zahlen, Spiegelung. Keine Lücken!

Wir können die natürlichen Zahlen in natürlicher Weise als eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  auffassen.

PROPOSITION. (Natürliche Zahlen als Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ) Sei  $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$  die eindeutige Abbildung (s.o.) mit

$$J(e) = 1_{\mathbb{R}} \text{ und } J(\nu(n)) = J(n) + 1_{\mathbb{R}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $J$  injektiv. Weiterhin ist  $J(\mathbb{N})$  abgeschlossen unter Bildung von Summen und Produkten (d.h. mit  $a, b \in J(\mathbb{N})$  gehören auch  $a + b$  und  $ab$  wieder zu  $J(\mathbb{N})$ ).

**Bemerkung.** Um die Struktur klarer hervorzuheben verwechselungen zu vermeiden, bezeichnen wir hier das ausgezeichnete Element von  $\mathbb{N}$  als  $e$  und die Nachfolgeabbildung als  $\nu$ .

*Beweis. Injektivität:* Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n) \neq J(m) \text{ für alle } m \neq n\}.$$

Wir zeigen, daß  $L$  induktiv ist:

Vorüberlegung: Es gilt  $J(n) > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Bew. Induktion ( $J(e) = 1_{\mathbb{R}} > 0$ ,  $J(\nu(n)) = J(n) + 1_{\mathbb{R}} > 0$ .)

**Es gilt**  $e \in L$ . Sei  $m \neq e$ . Dann gilt  $m = \nu(k)$  für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Damit folgt

$$J(m) = J(\nu(k)) = J(k) + 1_{\mathbb{R}} = J(k) + J(e) > J(e).$$

Dabei verwenden wir im letzten Schritt die Vorüberlegung. Mit  $J(m) > J(1)$  folgt  $J(m) \neq J(1)$ .

$n \in L$  **impliziert**  $\nu(n) \in L$ . Sei  $m \neq \nu(n)$ .

Gilt  $m = e$ , so gilt nach dem schon bewiesenen  $J(m) \neq J(\nu(n))$  (da  $\nu(n) \neq e$ ).

Gilt  $m \neq e$ , so gilt  $m = \nu(k)$ . Wegen  $m \neq \nu(n)$  folgt  $k \neq n$ . Aufgrund von  $n \in L$  folgt dann also  $J(n) \neq J(k)$ . Unter Nutzen dieser Beziehung koennen wir dann rechnen

$$J(m) = J(\nu(k)) = J(k) + 1_{\mathbb{R}} \neq J(n) + 1_{\mathbb{R}} = J(\nu(n)).$$

Das liefert die Behauptung.

*Abgeschlossenheit unter Addition.* Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n) + J(m) \in J(\mathbb{N}) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt  $e \in L$  da  $J(e) + J(m) = 1_{\mathbb{R}} + J(m) = J(m) + 1_{\mathbb{R}} = J(\nu(m)) \in J(\mathbb{N})$ . Weiterhin gilt  $n \in L \implies \nu(n) \in L$ , denn

$$J(\nu(n)) + J(m) = J(n) + 1_{\mathbb{R}} + J(m) = J(n) + J(\nu(m)) \in J(\mathbb{N}),$$

wobei  $n \in L$  für die letzten Schritt genutzt wurde.

*Abgeschlossenheit unter Multiplikation.* Analog. Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n)J(m) \in J(\mathbb{N}) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt  $e \in L$  da  $J(e)J(m) = 1_{\mathbb{R}}J(m) = J(m) \in J(\mathbb{N})$ . Weiterhin gilt  $n \in L \implies \nu(n) \in L$ , denn

$$J(\nu(n))J(m) = (J(n) + 1_{\mathbb{R}})J(m) = J(n)J(m) + 1_{\mathbb{R}}J(m) = J(n)J(m) + J(m) \in J(\mathbb{N}),$$

wobei Abgeschlossenheit unter Addition im letzten Schritt genutzt wurde.  $\square$

Die vorangegangene Proposition bietet die Möglichkeit auf den natürlichen Zahlen eine Multiplikation und eine Addition einzuführen gemäß

$$n + m := J^{-1}(J(n) + J(m)), \quad nm := J^{-1}(J(n)J(m)).$$

Diese Definition ist gerade so gemacht, dass  $J$  Addition und Multiplikation erhält, in dem Sinne, dass folgendes gilt:

$$J(n + m) = J(n) + J(m) \quad \text{und} \quad J(nm) = J(n)J(m)$$

für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Es gilt dann (Übung. Nutzt Injektivität von  $J$ ):

$$\begin{aligned} n + 1 &= \nu(n) \quad \text{sowie} \quad n + \nu(m) = \nu(n + m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}. \\ 1n &= n \quad \text{sowie} \quad \nu(k)n = kn + n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit handelt es sich genau um die in einer Bemerkung des letzten Kapitels schon einmal kurz angedeutete Addition und Multiplikation. Aus den entsprechenden Eigenschaften der Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{R}$  folgen sofort Assoziativität, Kommutativität der Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{N}$  sowie das Distributivgesetz

$$(n + m)k = nk + mk.$$

**Wichtig!** Wir werden im folgenden immer  $\mathbb{N}$  als mit dieser Multiplikation und Addition ausgestattet voraussetzen und (oft) nicht zwischen  $\mathbb{N}$  und  $J(\mathbb{N})$  unterscheiden.

Neben den natürlichen Zahlen bilden noch die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$$

wichtige Teilmengen der reellen Zahlen. Natürliche, ganze und rationale Zahlen sind jeweils abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Die wesentliche zusätzliche Eigenschaft der ganzen Zahlen (im Vergleich zu den natürlichen Zahlen) ist die Abgeschlossenheit unter der Bildung von Differenzen. Die wesentliche zusätzliche Eigenschaft der rationalen Zahlen (im Vergleich zu den ganzen Zahlen) ist die Abgeschlossenheit unter Bildung von Quotienten.

**Bemerkung.** Schaut man die obigen Beweise an, so stellt man fest, dass die Ordnungsvollständigkeit nicht verwendet wurde. Man kann also die natürlichen Zahlen auf diese Weise in jeden angeordneten Körper abbilden und entsprechend in jedem angeordneten Körper die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen wiederfinden.

**Gute Nachricht.** Ab jetzt 'dürfen' wir in  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  rechnen, wie wir es gewohnt sind. Dann wir haben die entsprechenden Objekte und Rechenregeln eingeführt bzw. bewiesen.

**Nach Hause nehmen:**  $\mathbb{R}$  charakterisiert durch Zusammenspiel von drei Strukturen: Körper, Anordnung, Ordnungsvollständigkeit. Die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen bilden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  (die unter gewissen Operationen abgeschlossen sind).

Wir zeigen nun die Existenz von Wurzeln nichtnegativer reeller Zahlen. Diese Existenz beruht wesentlich auf der Ordnungsvollständigkeit. Sie gilt nicht im Körper der rationalen Zahlen (s.o.).

**THEOREM.** (*Existenz  $k$ -ter Wurzeln*) Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann existiert für jedes  $x \geq 0$  ein eindeutiges  $y \geq 0$  mit  $y^k = x$ . Man definiert  $\sqrt[k]{x} := y$ . Es gilt  $\sqrt[k]{x_1} < \sqrt[k]{x_2}$  falls  $x_1 < x_2$ .

**Notation.** Man schreibt auch  $x^{1/k}$  fuer  $\sqrt[k]{x}$ .

*Beweis.* Der Fall  $x = 0$  ist klar. Wir betrachten nur noch  $x > 0$ .

*Eindeutigkeit:* Sei  $y^k = \tilde{y}^k$ . Ist  $y \neq \tilde{y}$ , so können wir ohne Einschränkung annehmen  $y < \tilde{y}$ . Das führt auf  $y^k < \tilde{y}^k$ . Widerspruch.

*Existenz:* Sei  $M := \{z \geq 0 : z^k \leq x\}$ . Dann ist  $M$  beschränkt (Falls  $x \leq 1$  ist 1 eine Schranke. Falls  $x > 1$  ist  $x$  eine Schranke.) Außerdem ist  $M$  nichtleer ( $0 \in M$ ). Damit hat  $M$  ein Supremum  $S$ . Wir zeigen  $S^k = x$ , indem wir  $S^k < x$  und  $S^k > x$  zum Widerspruch führen.

*Angenommen  $S^k < x$ :* Wir zeigen, daß dann auch  $(S + \varepsilon)^k < x$  für genügend kleine  $\varepsilon > 0$ . Widerspruch zu  $S$  obere Schranke.

Hier sind die Details:  $D := x - S^k > 0$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon < 1$  und

$$\varepsilon < \frac{D}{\sum_{l=0}^{k-1} S^l}$$

gegeben. Dann gilt also

$$0 < \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l (\varepsilon)^{k-l} \leq \left( \sum_{l=0}^{k-1} S^l \right) \varepsilon < x - S^k = D.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (S + \varepsilon)^k &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} S^l \varepsilon^{k-l} \\ &= S^k + \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l \varepsilon^{k-l} \\ &< S^k + D \\ &= x. \end{aligned}$$

*Angenommen*  $S^k > x$ : Wir zeigen ähnlich wie im ersten Fall, daß dann auch  $(S - \varepsilon)^k > x$  für alle genügend kleinen  $\varepsilon > 0$ . Dann ist aber, wie man leicht sieht,  $S - \varepsilon$  eine obere Schranke von  $M$ . Offenbar ist aber  $S - \varepsilon$  kleiner als  $S$ . Widerspruch:  $S$  kleinste obere Schranke.

*Monotonie*: Sei  $x < y$ . Nach der gezeigten Eindeutigkeit ist  $\sqrt[k]{x} \neq \sqrt[k]{y}$ . Wäre  $\sqrt[k]{x} > \sqrt[k]{y}$ , so folgte  $x = (\sqrt[k]{x})^k > (\sqrt[k]{y})^k = y$ . Widerspruch.  $\square$

**FOLGERUNG.** Für ein beliebiges  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $|a| = \sqrt{2}a^2$

*Beweis.* Nach Definition des Betrages gilt  $|a| \geq 0$  und, wie die Fallunterscheidung  $a \geq 0$  bzw.  $a < 0$  zeigt,  $|a|^2 = a^2$ . Damit folgt die gewünschte Aussage aus der Eindeutigkeit der Wurzel.  $\square$

←  
Ende der 8. Vorlesung

Für rationale Zahlen  $a = m/n$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $x \geq 0$  kann man dann definieren

$$x^a := (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Das ist wohldefiniert i.e. es gilt die zweite Gleichung und es hängt nicht von der Darstellung der rationalen Zahl ab. Für reelles  $s > 0$  und  $x \geq 0$  definiert man dann

$$x^s := \sup\{x^q : q \in \mathbb{Q} : 0 < q \leq s\}.$$

Auch das ist wohldefiniert i.e. stimmt für rationale  $s$  mit der schon gegebenen Definition überein. Schliesslich definiert man für  $a > 0$  und  $x > 0$  noch

$$x^{-a} := \frac{1}{x^a}.$$

Dann kann man folgende Rechenregeln zeigen:

$$x^b x^c = x^{b+c}$$

$$(x^b)^c = x^{bc}$$

$$x^c y^c = (xy)^c.$$

für  $x, y > 0$  und  $b, c$  reell. Wir werden diese Definitionen und Rechenregeln später als Nebenprodukt erhalten. Darum geben wir hier keine weiteren Details.

**Bemerkung.** Der Ausdruck  $0^0$  stellt ein Problem dar:

$a^0 = 1$  für alle  $a > 0$ . Das suggeriert  $0^0 = 1$ .

$0^s = 0$  für alle  $s > 0$ . Das suggeriert  $0^0 = 0$ .

Daher muss man diesen Fall getrennt und kontextabhängig behandeln.



## KAPITEL 3

### Archimedisches Axiom und Intervallschachtelungsprinzip

Die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ist von entscheidender Bedeutung für alle weiteren Untersuchungen. Sie kann in zwei Aspekte 'zerlegt' werden, nämlich Gültigkeit des Archimedischen Axiom und Konvergenz gewisser Folgen. Eine Möglichkeit, Konvergenz von Folgen zu fassen, liefert das Intervallschachtelungsprinzip. Das behandeln wir in diesem Abschnitt. Ausführliche weitere Untersuchungen zu Konvergenz von Folgen finden sich im kommenden Kapitel.

#### 1. Das Archimedische Axiom

In diesem Abschnitt lernen wir noch eine weitere Eigenschaft der reellen Zahlen kennen, die in unserem Zugang eine Folgerung ist. Das Archimedische Axiom liefert insbesondere Existenz von Nullfolgen und Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ .

Wie schon (mehrfach) diskutiert, kann man die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  in jedem angeordneten Körper  $K$  via

$$\mathbb{N} \longrightarrow K, n \mapsto J(n) = n1$$

mit  $J(e) = 1$  und  $J(\nu(n)) = J(n) + 1$ , wiederfinden. Wir schreiben dann im folgenden (meist)  $n$  statt  $n1$  und auch  $n/m$  statt  $n1/m1$ .

LEMMA (Charakterisierung Archimedisches Axiom). *Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

- (i) Für alle  $x > 0$  existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $x < m$ . **Zeichnung**
- (ii) Für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{m} < \epsilon$ . **Zeichnung**
- (iii) Für alle  $x, y > 0$  existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $y < mx$  oder, äquivalent,  $y/m < x$ .

*Beweis.* (iii) $\implies$ (ii): Das folgt sofort mit  $x = \epsilon$  und  $y = 1$ .

(ii) $\implies$ (i): (Nach (ii) angewendet auf  $\epsilon = 1/x$ ) existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $1/m < 1/x$ . Damit folgt dann durch Bilden des Kehrwertes  $x < m$ .

(i) $\implies$ (iii): Wähle nach (i) ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $1/x < m$  also  $1/m < x$ . Wähle außerdem, wieder nach (i), ein  $l \in \mathbb{N}$  mit  $y/l < 1$ . Dann gilt für  $k = lm \in \mathbb{N}$  also

$$\frac{y}{lm} = \frac{1}{m} \frac{y}{l} < \frac{1}{m} 1 < x.$$

□

**DEFINITION.** (*Archimedisches Axiom*) Ein angeordneter Körper  $K$  erfüllt das Archimedische Axiom, wenn eine der äquivalenten Eigenschaften des vorigen Lemma gilt.

**FOLGERUNG.** (*Dichtheit von  $\mathbb{Q}$* ) Sei  $K$  ein angeordneter Körper, der das Archimedische Axiom erfüllt. Dann gibt es zu  $x, y \geq 0$  mit  $x < y$  Elemente  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $x < n/m < y$ . Insbesondere existiert zu jedem  $x \geq 0$  und  $\varepsilon > 0$  Elemente  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $|x - n/m| < \varepsilon$ . Für  $x \leq 0$  gilt entsprechendes, wenn man  $m/n$  durch  $-m/n$  ersetzt.

*Beweis.* Sei  $\delta := y - x > 0$ . Dann existiert nach dem Archimedischen Axiom ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $1 < m\delta = my - mx$ .

Beh. Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $mx < n < my$ .

Bew. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann gilt fuer die Menge  $L := \{k \in \mathbb{N}_0 : k \leq mx\}$  die Gleichheit

$$L = \mathbb{N}_0.$$

(Denn  $0 \in L$ : klar.  $k \in L \implies k + 1 \in L$ : Sonst  $k \leq mx$  und  $(k + 1)1 > mx$ . Dann muss aber, wegen  $1 \leq my - mx$  gelten  $mx < (k + 1)1 < my$  Widerspruch). Das ist ein Widerspruch zum Archimedischen Axiom.

Sind  $n, m$  wie in der Behauptung, so folgt nach Division durch  $m$  also  $x < n/m < y$ . □

**Bemerkung.** In einem angeordneten Körper  $K$ , der das Archimedische Axiom erfüllt, gilt dann also für jedes  $s \in K$  mit  $s > 0$

$$s = \sup\left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}, \frac{n}{m} < s\right\} = \inf\left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}, \frac{n}{m} > s\right\}$$

und entsprechend für negative  $s$ .

**FOLGERUNG.** Sei  $K$  ein angeordneter Körper, der das Archimedische Axiom erfüllt.

(a) Sei  $a > 1$ . Dann existiert zu jedem  $C \in K$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a^n > C$ .

(b) Sei  $0 < a < 1$ . Dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $0 < a^n < \varepsilon$ .

*Beweis.* (a) Das folgt aus der Bernoulli Ungleichung:  $a = 1 + \delta$  mit  $\delta > 0$ . Also

$$a^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > C.$$

Hier wird im letzten Schritt das Archimedische Axiom verwendet.

(b) Das folgt aus (a) durch Bilden des Kehrwertes. □

**THEOREM.** (*Archimedisches Axiom*) In  $\mathbb{R}$  gilt das archimedische Axiom.

*Beweis.* Zu zeigen: Sind  $x, y > 0$  so existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $ny > x$ . Wir nehmen an, daß die Aussage nicht gilt. Dann ist die Menge

$$M := \{ny : n \in \mathbb{N}\}$$

also nach oben beschränkt (durch  $x$ ) und besitzt aufgrund der Ordnungsvollständigkeit ein Supremum  $S$ . Da  $S$  eine obere Schranke fuer  $M$  ist gilt dann also

$$(n + 1)x \leq S \text{ fuer alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt dann sofort

$$nx \leq S - x \text{ fuer alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist dann  $S - x$  ist obere Schranke von  $M$ . Widerspruch.  $\square$

### Bemerkungen.

- Auch in  $\mathbb{Q}$  gilt das Archimedische Axiom (Warum?  $n/m \leq n$ ).
- Nicht in jedem angeordneten Körper gilt das Archimedische Axiom (— — — > Nichtstandard Analysis).

## 2. Intervallschachtelungsprinzip

In diesem Abschnitt lernen wir eine weitere Konsequenz der Ordnungsvollständigkeit kennen.

Zunächst einige Bezeichnungen. Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann definiert man für  $a \leq b$  die Intervalle:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in K : a \leq x \leq b\} \text{ abgeschlossenes Intervall.} \\ (a, b) &:= \{x \in K : a < x < b\} \text{ offenes Intervall (kann leer sein)} \\ (a, b] &:= \{x \in K : a < x \leq b\} \text{ nach links halboffenes Intervall.} \\ [a, b) &:= \{x \in K : a \leq x < b\} \text{ nach rechts halboffenes Intervall.} \end{aligned}$$

Es heissen dann  $a, b$  die Randpunkte des Intervalles und  $|I| := b - a$  die Länge des Intervalles.

Idee zur Intervallschachtelung: Eine geschachtelte Folge von Intervallen, die sich zusammenziehen. **Zeichnung.**

DEFINITION. Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Eine Familie  $I_n, n \in \mathbb{N}$ , von Intervallen in  $K$  heißt Intervallschachtelung, wenn gilt:

- Jedes  $I_n$  ist abgeschlossen.
- $I_{n+1} \subset I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . ('Geschachtelt')
- $|I_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  (d.h. für alle  $\epsilon > 0$  existiert ein  $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $|I_n| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_\epsilon$ ). ('Zusammenziehen')

DEFINITION. (Intervallschachtelungsprinzip) Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann erfüllt  $K$  das Intervallschachtelungsprinzip, wenn es zu jeder Intervallschachtelung  $I_n, n \in \mathbb{N}$ , einen Punkt  $x \in K$  gibt mit  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bemerkung.** Ist  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Intervallschachtelung, so kann es höchstens einen Punkt geben, der zu allen  $I_n$  gehört. Ein solcher Punkt ist also eindeutig.

(Bew. Seien  $x$  und  $y$  zwei solcher Punkte, so gilt  $|x - y| \leq |I_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (da  $x, y \in I_n$ ). Wegen  $|I_n| \rightarrow 0$  gilt dann  $|x - y| \leq \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Damit folgt  $|x - y| = 0$ .)

**THEOREM.** In  $\mathbb{R}$  gilt das Intervallschachtelungsprinzip.

*Beweis.* Es bilden die Intervalle  $I_n = [a_n, b_n]$  eine Intervallschachtelung. Zu zeigen: Es gibt ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Es gilt (Induktion)  $I_m \subset I_n$  für alle  $m \geq n$ . Damit folgt

$$a_m \leq b_n \quad (*)$$

für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ . (Fallunterscheidung  $n \leq m : a_m \leq b_m \leq b_n$  und  $m < n : a_m \leq a_n \leq b_n$ . Zeichnung).

← Ende der 9. Vorlesung

Damit ist also die Menge

$$M := \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt (zum Beispiel durch  $b_1$ ). Aufgrund der Ordnungsvollständigkeit existiert dann also

$$x := \sup M.$$

Da  $x$  eine obere Schranke von  $M$  ist gilt

$$a_m \leq x \quad (**)$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Weiterhin ist aufgrund von  $(*)$  aber jedes  $b_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine obere Schranke von  $M$  und es gilt dann (aufgrund der Supremumseigenschaft) also

$$x \leq b_n \quad (***)$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $(**)$  und  $(***)$  folgt  $x \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Bemerkung.** (Uebung) Der obige Schluss nutzt nicht, daß sich die Intervalle zusammenziehen. Er funktioniert für jede Folge von ineinander enthaltenen abgeschlossenen Intervallen. Genauer gilt: Ist  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge von abgeschlossenen Intervallen  $I_n = [a_n, b_n]$  in  $\mathbb{R}$  mit  $I_{n+1} \subset I_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\sup a_n \leq \inf b_n$  und

$$S := \bigcap_n I_n = [\sup a_n, \inf b_n].$$

Insbesondere ist  $S$  also nichtleer und ein abgeschlossenes Intervall. Wenn sich die Intervalle zusammenziehen (also eine Intervallschachtelung bilden), so besteht  $S$  nur aus einem Punkt. Eine entsprechende Aussage gilt im Allgemeinen nicht, wenn die Intervalle nicht abgeschlossen sind.

### 3. Eine Äquivalenz

THEOREM. *Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Es ist  $K$  ordnungsvollständig (d.h.  $K = \mathbb{R}$ ).*
- (ii) *Für  $K$  gilt das Intervallschachtelungsprinzip und das Archimedische Axiom.*

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii): Die entsprechenden Aussagen wurden in den beiden vorigen Abschnitten gezeigt.

(ii)  $\implies$  (i): Sei  $M$  eine nach oben beschränkte Menge in  $K$ . Zu zeigen:  $M$  hat ein Supremum.

Sei  $C$  eine obere Schranke von  $M$ . Sei  $u \in K$  keine obere Schranke von  $M$  z.B.  $u = y - 1$  für ein  $y \in M$ . Wir konstruieren induktiv Intervalle  $I_n = [a_n, b_n]$  mit

- Alle  $b_n$  sind obere Schranken von  $M$ .
- Alle  $a_n$  sind keine oberen Schranken von  $M$ .
- $I_{n+1} \subset I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$ .

Dann bilden die  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Intervallschachtelung (die letzte Eigenschaft liefert nach dem Archimedischen Axiom, daß  $|I_n| = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ ). Für den gemeinsamen Punkt  $x$  aller  $I_n$  (der nach Voraussetzung existiert) gilt dann

- $x$  ist obere Schranke (sonst  $z \in M$  mit  $x < z$  Widerspruch zu  $b_n$  beliebig nahe an  $x$  für große  $n$  und  $b_n$  obere Schranke. Zeichnung)
- Es gibt keine kleinere obere Schranke als  $x$  (sonst  $m \leq z < x$ , für alle  $m \in M$ . Widerspruch zu  $a_n$  beliebig nahe an  $x$  für große  $n$  und  $a_n$  keine obere Schranke. Zeichnung)

Nun zur Konstruktion: Wir setzen  $I_1 := [u, C]$ . Seien  $I_1, \dots, I_n$  wie oben schon konstruiert und  $I_n = [a_n, b_n]$ . Sei

$$m := (a_n + b_n)/2$$

der Mittelpunkt von  $I_n$ . Wir unterscheiden zwei Fälle (Zeichnung):

*Fall 1:*  $m$  ist obere Schranke von  $M$ . Wir setzen  $I_{n+1} := [a_n, m]$ . Zeichnung.

*Fall 2:*  $m$  ist keine obere Schranke von  $M$ . Wir setzen  $I_{n+1} := [m, b_n]$ . Dann hat  $I_{n+1}$  die gewünschten Eigenschaften.

Zeichnung 'konvergierende Intervalle'. □

## KAPITEL 4

### Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$

In diesem Kapitel lernen wir das zentrale Konzept der Analysis kennen, nämlich das Konzept der Konvergenz bzw. des Grenzwertes. Es ist grundlegend für alle weiteren Untersuchungen und (in gewisser Weise) das schwierigste Konzept der Analysis.

#### 1. Definitionen und Rechenregeln

**DEFINITION.** (*Folge*) Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  heißt Folge (in  $X$ ).

**Notation.**  $(x_n)$  oder  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(x_n)_n$ .

**Beispiele.**

- Sei  $c \in \mathbb{R}$  beliebig und  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto c$ , also  $x_n = c$  für alle  $n$ . Dann heißt  $(x_n)$  die konstante Folge mit Wert  $c$ .
- $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto (-1)^n$ , also  $x_n = (-1)^n$ .
- $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto \frac{1}{n}$ , also  $x_n = \frac{1}{n}$ .

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Analysis, dem Begriff der **Konvergenz**.

**Idee.** Die Folge  $(x_n)$  konvergiert gegen den Wert  $x$ , wenn für alle genügend großen  $n$  die Zahl  $x_n$  der Zahl  $x$  beliebig nahe ist.

Es wird nun darum gehen, diese Idee und insbesondere 'genuegend gross' und 'beliebig nahe' praezise zu fassen. Das verlangt Arbeit, da es um das Verhalten der Folge im Unendlichen geht.

**DEFINITION.** (*Konvergenz*) Die Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert gegen  $x$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, sodaß für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt  $|x_n - x| < \varepsilon$ . Dann heißt  $x$  Grenzwert der Folge  $(x_n)$ . Eine Folge, die nicht gegen ein  $x$  konvergiert heißt divergent.

**Zeichnung**  $\varepsilon$ - Falle

**Zeichnung.**  $\varepsilon$ - Schlauch

**Wichtig.** Eine Folge  $(x_n)$  kann nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren (d.h. der Grenzwert ist eindeutig, wenn er existiert).

Bew: Es konvergiere  $(x_n)$  gegen  $x$  und gegen  $y$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es also  $n_x$  mit  $|x - x_n| < \varepsilon$  für  $n \geq n_x$ , und es gibt  $n_y$  mit  $|y - x_n| < \varepsilon$  für  $n \geq n_y$ . Mit  $n \geq n_x, n_y$  gilt dann also

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $|x - y| = 0$ , also  $x = y$ .

Aufgrund der Eindeutigkeit kann man von **dem Grenzwert** einer Folge sprechen (falls existent).

**Notation.** Konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x$ , so schreibt man auch

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ oder } x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$$

und nennt  $x$  den Grenzwert der Folge  $(x_n)$ .

**Bemerkung.** Diese und ähnliche Definitionen lassen sich mit sogenannten Quantoren ausdrücken. Wir werden in dieser Vorlesung kaum Quantoren benutzen (aber die zugrundeliegenden Zusammenhänge natürlich ständig verwenden). In Quantoren lautet die Definition von Konvergenz einer Folge:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon |x - x_n| < \varepsilon.$$

Hier: '∀◇' steht für 'Für alle ◇ gilt:'

'∃♣' steht für 'Es existiert ♣ mit der Eigenschaft, daß / sodaß...'. Damit ergibt sich auch, daß Quantoren immer an den Anfang der Aussage gestellt werden müssen.

←  
Ende der 10. Vorlesung

**Bemerkung.** (Konvergenz entscheidet sich ganz weit draussen):  $x_n \rightarrow x$ . Sei  $N > 0$  und  $(y_n)$  Folge mit  $x_n = y_n$  für  $n \geq N$ . Dann gilt  $y_n \rightarrow x$ .  
Bew. Sei  $\varepsilon > 0$ . Es existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x| < \varepsilon$  für  $n \geq n_\varepsilon$ . Für  $n \geq n_\varepsilon, N$  gilt also

$$|y_n - x| = |x_n - x| < \varepsilon.$$

**DEFINITION.** Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow 0$  heisst Nullfolge.

**PROPOSITION.** Ist  $(x_n)$  eine Nullfolge in  $\mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  beliebig, so sind auch  $(x_n^k)$  und  $(\sqrt[k]{|x_n|})$  Nullfolgen.

*Beweis.* Wir betrachten zunäcchst den Fall  $(x_n^k)$ : Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(x_n)$  eine Nullfolge ist, existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n| = |x_n - 0| < \sqrt[k]{\varepsilon}$  fuer alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Damit gilt dann fuer alle  $n \geq n_\varepsilon$  auch

$$|x_n^k - 0| = |x_n^k| = |x_n|^k < (\sqrt[k]{\varepsilon})^k = \varepsilon.$$

Wir betrachten nun den Fall ( $\sqrt[k]{|x_n|}$ ): Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $(x_n)$  eine Nullfolge ist, existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n| = |x_n - 0| < \varepsilon^k$  fuer alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Damit gilt dann fuer alle  $n \geq n_\varepsilon$  auch

$$|\sqrt[k]{|x_n|} - 0| = \sqrt[k]{|x_n|} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis.  $\square$

### Drei Beispiele.

- Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann ist die konstante Folge  $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_n = c$ , konvergent gegen  $c$ .

Bew...

- Sei  $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ . Dann konvergiert  $x_n$  gegen 0.

Bew. Das folgt aus dem Archimedischen Axiom.

In gewisser Weise ist dies die einzige explizite konvergente Folge, die wir kennen.

- Sei  $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_n = (-1)^n$  d.h.  $x_n = -1$  für ungerade  $n$  und  $x_n = 1$  für gerade  $n$ . Dann ist  $(x_n)$  nicht konvergent.

Bew. Wir beweisen ein allgemeines Kriterium.

Beh. Ist  $(x_n)$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$ , so ist die Folge  $y_n := x_{n+1} - x_n$  eine Nullfolge (d.h. konvergent gegen 0).

Bew. ...

Mit diesem allgemeinen Kriterium sieht man sofort, daß  $x_n = (-1)^n$  nicht konvergiert, da  $y_n$  immer den Betrag 2 hat.

Wir geben jetzt noch eine leichte Umformulierung der Definition von Konvergenz. Zu  $x \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  sei die  $\varepsilon$ -Umgebung (oder  $\varepsilon$ -Kugel um  $x$ )  $U_\varepsilon(x)$  von  $x$  definiert durch

$$U_\varepsilon(x) := \{z \in \mathbb{R} : |z - x| < \varepsilon\}.$$

Es gilt also

$$U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Eine solche Umgebung ist dann nichts anderes als ein offenes Intervall um  $x$ . In diesem Sinne hätten wir das Konzept der Umgebung also nicht neu einführen müssen. Für spätere Verallgemeinerungen erweist sich aber das Denken mit Umgebungen als sehr nützlich.

**Bemerkung.** Allgemein nennt man eine Menge  $U$  Umgebung von  $x \in \mathbb{R}$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $U_\varepsilon(x) \subset U$ .

**PROPOSITION.** (*Charakterisierung Konvergenz*) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $(x_n)$  konvergiert gegen  $x$
- (ii) Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  so daß für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt  $x_n \in U_\varepsilon(x)$ .



- (iii) Für alle  $\varepsilon > 0$  ist die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_\varepsilon(x)\}$  endlich (d.h. für jedes feste  $\varepsilon > 0$  liegen bis auf endlich viele Ausnahmen alle  $x_n$  in der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$ ).

*Beweis.* Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist klar. (Denn:  $z \in U_\varepsilon(x) \iff |z - x| < \varepsilon$ .)

(ii)  $\iff$  (iii): Eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$  ist genau dann endlich, wenn ab einem gewissen  $n_0$  keine natürliche Zahl mehr dazu gehört.  $\square$

Bevor wir uns der Existenz konvergenter Folgen widmen, sammeln wir hier schon einmal ein paar nützliche Eigenschaften.

**FOLGERUNG.** Ist die Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$ , so ist die Menge  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt.

*Beweis.* Sei  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Für  $n \geq n_1$  gilt  $|x - x_n| < 1$ , also

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq 1 + |x|.$$

Damit folgt

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x|\}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Bemerkung.** Beschränktheit einer Folge hängt nicht von den ersten endlich vielen Gliedern ab.

Wir werden nun beweisen, daß Konvergenz mit einer ganzen Reihe von Operationen verträglich ist. Die folgenden Betrachtungen zeigen insbesondere, daß Konvergenz mit den Operationen  $+$ ,  $\cdot$ ,  $:$  und  $|\cdot|$  verträglich ist.

**PROPOSITION (Rechenregeln).** Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt.

(a)  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \implies x_n + y_n \rightarrow x + y$ .

(b)  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \implies x_n y_n \rightarrow xy$ . Insbesondere  $\alpha x_n \rightarrow \alpha x$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(c)  $x_n \rightarrow x$ , und  $y_n \rightarrow y$  mit  $y \neq 0 \implies y_n \neq 0$  für  $n \geq n_0$  und  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{x}{y}$ .

**Bemerkung.** Später werden wir obige Proposition so ausdrücken: Die Abbildungen  $+$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow x + y$ ,  $\cdot$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \rightarrow xy$  und  $:$ :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x/y$  sind stetig.

*Beweis.* (a) Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen  $x_n \rightarrow x$  gibt es ein  $n_x$  mit  $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_x$ . Wegen  $y_n \rightarrow y$  gibt es ein  $n_y$  mit  $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_y$ . Für  $n \geq n_\varepsilon := \max\{n_x, n_y\}$  gilt dann also nach Dreiecksungleichung

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig.

Wähle  $C > 0$  mit  $|x_n| \leq C$  für alle  $n$ . Wegen  $x_n \rightarrow x$  existiert  $n_x \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|+1}$ . Wegen  $y_n \rightarrow y$  existiert  $n_y \in \mathbb{N}$  mit  $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2C}$ . Damit gilt für  $n \geq \max\{n_x, n_y\}$  also

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \dots$$

(c) Wegen  $y_n \rightarrow y$  existiert ein  $n_0$  mit  $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$  für  $n \geq n_0$ . Damit gilt also für  $n \geq n_0$

$$|y_n| \geq |y| - |y_n - y| > |y|/2 > 0.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wegen  $x_n \rightarrow x$  existiert ein  $n_x$  mit

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon|y|}{4}$$

für alle  $n \geq n_1$ . Wegen  $y_n \rightarrow y$  existiert ein  $n_y$  mit

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon|y|^2}{2|x|+1}.$$

Für  $n \geq \max\{n_x, n_y, n_1\}$  gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \left| \frac{yx_n - xy_n}{yy_n} \right| \\ &\leq \frac{2}{|y|^2} |yx_n - xy_n| \\ &\leq \frac{2}{|y|^2} (|y||x_n - x| + |x||y_n - y|) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

← Ende der 11. Vorlesung

**PROPOSITION (Verträglichkeit mit Betrag).** Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow x$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Dann folgt  $|x_n| \rightarrow |x|$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Das folgt sofort aus der zweiten Dreiecksungleichung

$$||x| - |x_n|| \leq |x - x_n| :$$

Ist naemlich  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben, so existiert aufgrund von  $x_n \rightarrow x$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|x - x_n| < \varepsilon$  fuer alle  $n \geq N$  und aufgrund der genannten Dreiecksungleichung gilt dann fuer solche  $n$  ebenfalls  $||x| - |x_n|| < \varepsilon$ . □

**PROPOSITION (Verträglichkeit mit Bildung von Maximum und Minimum).** Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$  und  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow y$ . Dann gilt  $\max\{x_n, y_n\} \rightarrow \max\{x, y\}$  und  $\min\{x_n, y_n\} \rightarrow \min\{x, y\}$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}, \quad \max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

Nun folgt die Behauptung aus den schon gezeigten Aussagen zur Verträglichkeit der Konvergenz mit Betragsbildung und mit Addition und Subtraktion.  $\square$

**PROPOSITION** (Verträglichkeit von Konvergenz mit  $\leq$ ). *Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \leq c$  /  $x_n \geq c$  und  $x_n \rightarrow x$ . Dann gilt  $x \leq c$  /  $x \geq c$ .*

*Beweis.* Wir betrachten  $x_n \leq c$ . Angenommen  $x > c$ . Dann ist  $\varepsilon := x - c > 0$ . Wegen  $x_n \rightarrow x$  müsste gelten  $x_n \in U_\varepsilon(x)$  für große  $n$ , also  $x_n > c$ . Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung.** Gilt  $x_n < c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  sowie  $x_n \rightarrow x$  so folgt im allgemeinen NICHT  $x < c$ . Beispiel:  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ . Dann  $x_n < 1$ , aber  $x = \lim x_n = 1$

**THEOREM** (Sandwichtheorem). *Seien  $L \in \mathbb{R}$  und konvergente Folgen  $(x_n)$  und  $(y_n)$  in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  gegeben. Ist  $(z_n)$  eine weitere Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $x_n \leq z_n \leq y_n$  für alle  $n$  ab einem gewissen  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so konvergiert  $(z_n)$  ebenfalls gegen  $L$ .*

*Beweis.* **Zeichnung.**

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig.

Wegen  $L = \lim x_n$  gibt es ein  $n_x \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \geq L - \varepsilon$  für alle  $n \geq n_x$ .

Wegen  $L = \lim y_n$  gibt es ein  $n_y \in \mathbb{N}$  mit  $y_n \leq L + \varepsilon$  für alle  $n \geq n_y$ .

Für  $n \geq n_x, n_y, n_0$  gilt dann also

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq L + \varepsilon$$

und damit

$$|z_n - L| < \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

Es ist sinnvoll in gewissen Fällen auch  $\pm\infty$  als Wert zuzulassen: Tatsächlich gibt es unter den divergenten Folgen in  $\mathbb{R}$  zwei Klassen von Folgen mit besonders guten Eigenschaften:

- Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  heißt bestimmt divergent gegen  $\infty$ ,  $x_n \rightarrow \infty$ , wenn für jedes  $C \in \mathbb{R}$  ein  $n_C \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n \geq C$  für alle  $n \geq n_C$ .
- Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  heißt bestimmt divergent gegen  $-\infty$ ,  $x_n \rightarrow -\infty$ , wenn für jedes  $C \in \mathbb{R}$  ein  $n_C \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n \leq C$  für alle  $n \geq n_C$ .

Bei vorsichtigem Umgang mit  $\infty$  bleiben einige Rechenregeln für konvergente Folgen auch für bestimmt divergente Folgen noch gültig. Eine **wichtige Ausnahme** stellt der Umgang mit Termen der Form  $0 \cdot \infty$  und  $\infty - \infty$  dar (siehe Übung).

**Bemerkung.** Es gilt folgende Äquivalenz:  $x_n \rightarrow \infty \iff x_n > 0$  für alle genügend großen  $n$  und  $1/x_n \rightarrow 0$ . Entsprechendes gilt für  $x_n \rightarrow -\infty$ .

**Beispiele.**  $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ .

Bew.  $n! = n(n-1) \cdots 1 \geq n/2 \cdots n/2 = (n/2)^{n/2}$ . ( $n/2$ -Faktoren).

Damit  $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{(n/2)^{n/2}} = (n/2)^{1/2} \rightarrow \infty$ .

Ähnlich kann man für Supremum und Infimum von unbeschränkten Mengen verfahren:

- Sei  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Ist  $M$  nicht nach oben / unten beschränkt, so setzen wir  $\sup M = \infty$  /  $\inf M = -\infty$ .

**Bemerkung.**

- Gilt  $\sup M = \infty$ , so existiert Folge  $(x_n)$  in  $M$  mit  $x_n \rightarrow \infty$ . Entsprechendes gilt für Infimum.
- Mit obiger Definition hat also jede Menge  $M$  in  $\mathbb{R}$  ein Supremum bzw. ein Infimum.

Mit den bisherigen Betrachtungen können wir Konvergenz einiger Folgen untersuchen.

**Beispiele.** (a) Sei  $a \neq 0$  und  $x_n = \frac{a}{n}$ . Dann konvergiert  $(x_n)$  gegen 0. (Nullfolge).

Bew. Archimedes oder Rechenregeln  $a/n = a \cdot \frac{1}{n}$ .

(b) Sei  $0 < q < 1$  und  $x_n = q^n$ . Dann konvergiert  $(x_n)$  gegen 0. (Exponentielles Fallen).

Bew. Das ist eine Folgerung aus dem Archimedischen Axiom und wurde oben schon behandelt.

(c) Sei  $0 < q < 1$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $x_n = q^n n^k$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . (Exponentielles Fallen schlägt polynomiell Wachsen)

**Beachte.**  $q^n \rightarrow 0$ , aber  $n^k \rightarrow \infty$  für  $k > 1$ . Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew. Plan: Schreibe  $q^n$  also  $p^{2kn} = p^{kn} p^{kn}$  mit geeignetem  $p$  mit  $0 < p < 1$ . Dann gilt also

$$q^n n^k = p^{kn} p^{kn} n^k = p^{kn} (p^{kn} n^k).$$

Erster Term gegen Null; zweiter Term beschränkt. Hier sind die Details:  $p := \sqrt[2k]{q} < 1$ .

Also  $1/p = 1 + a$  mit  $a > 0$ . Die Bernoulli - Ungleichung impliziert  $(1/p)^n \geq 1 + na$  und damit  $0 < p^n < \frac{1}{na}$ . Mit  $0 \leq q^n = p^{2kn}$  folgt also

$$0 \leq q^n n^k \leq p^{kn} p^{kn} n^k \leq p^{kn} \left(\frac{1}{na}\right)^k n^k = p^{kn} \left(\frac{1}{a}\right)^k.$$

Damit folgt die Aussage aus (b) und dem Sandwichtheorem.

(d) Sei  $a > 0$  und  $x_n = \sqrt[n]{a}$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Bew. Wir unterscheiden drei Fälle:

$a = 1$ . Das ist einfach.

$a > 1$ : Wegen  $a > 1$  und  $a = x_n^n$  gilt  $x_n > 1$ . Weiterhin gilt

$$a = x_n^n = (1 + (x_n - 1))^n \geq 1 + n(x_n - 1).$$

Damit folgt  $(a - 1)/n \geq x_n - 1 \geq 0$  und dann  $(a - 1)/n + 1 \geq x_n \geq 1$ .

Damit folgt nach (a) und dem Sandwichtheorem  $x_n \rightarrow 1$ .

$0 < a < 1$ : Das folgt nach Bilden des Kehrwertes aus dem schon bewiesenen.

(e) Sei  $x_n = \sqrt[n]{n}$ . Dann gilt  $x_n \rightarrow 1$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Beachte.** Wettstreit zwischen  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$  und  $n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew. Es gilt  $x_n^n = n$ , also insbesondere  $x_n > 1$ . Mit binomischem Satz folgt

$$n = (1 + (x_n - 1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (x_n - 1)^k \geq \binom{n}{2} (x_n - 1)^2 = \frac{n(n-1)}{2} (x_n - 1)^2,$$

also

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq x_n - 1 \geq 0,$$

also

$$1 \leq x_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Mit  $\frac{2}{n-1} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , folgt auch  $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Damit folgt Behauptung aus dem Sandwichtheorem.

## 2. Aspekte der Vollständigkeit

Die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  liefert die Konvergenz ganzer Klassen von konvergenten Folgen. Tatsächlich ist diese Konvergenz zusammen mit dem Archimedischen Axiom ein Charakteristikum der reellen Zahlen. Das wird in diesem Abschnitt studiert.

**DEFINITION.** Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  heißt monoton wachsend / fallend wenn  $x_{n+1} \geq x_n$  /  $x_{n+1} \leq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**Zeichnungen einer nach oben beschränkten monotonen Folge:** auf der Achse, oder als Graph...

**Bemerkung.** Ist  $(x_n)$  monoton wachsend, so gilt  $x_n \leq x_m$  fuer alle  $n \leq m$  (nach einer einfachen Induktion). Entsprechendes gilt fuer monoton fallende Folgen.

**DEFINITION.** Eine Folge  $(x_n)$  heißt nach oben / unten beschränkt, wenn die Menge  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  nach oben / unten beschränkt ist.

**THEOREM.** (Konvergenz monotoner beschränkter Folgen) Jede monoton wachsende / fallende nach oben / unten beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert.

*Beweis. Zeichnung.* Sei  $(x_n)$  eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann existiert also aufgrund der Ordnungsvollständigkeit

$$S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Da  $S$  eine obere Schranke von ist, gilt

$$x_n \leq S$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert, da  $S - \varepsilon$  keine obere Schranke ist, also ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$S - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon}.$$

Damit folgt also für alle  $n \geq n_\varepsilon$  aufgrund der Monotonie

$$S - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq S$$

also  $|S - x_n| < \varepsilon$ .

Der Fall monoton fallender nach unten beschränkter Folgen kann analog behandelt werden.  $\square$

**Bemerkung.**

- Neben der Konvergenz von  $(\frac{1}{n})$  gegen 0 haben wir also in unseren Zugang zu  $\mathbb{R}$  eine Methode zur Erzeugung konvergenter Folgen eingebaut.
- Ist die Folge  $(x_n)$  wachsend / fallend, so gilt  $x_n \rightarrow C$ , wobei  $C \in \mathbb{R}$  (falls die Folge  $(x_n)$  beschränkt ist) und  $C = \infty / C = -\infty$  (falls die Folge  $(x_n)$  unbeschränkt ist).

**Beispiel - die Eulersche Zahl  $e$ :**  $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$  konvergiert. Der Grenzwert wird Eulersche Zahl genannt und mit  $e$  bezeichnet.

**Beachte.**  $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ , aber  $a^n \rightarrow \infty$  für  $a > 1$ . Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew: Wir zeigen, daß  $(x_n)$  wachsend und beschränkt ist. Die Bernoulli Ungleichung liefert

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

also

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1}$$

für alle  $n \geq 2$ . Die Folge  $(x_n)$  ist also wachsend. Die Folge  $(x_n)$  ist beschränkt durch 3:

$$\begin{aligned}
 x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
 (\text{Binomi}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \frac{1}{n^k} \\
 (\text{Umsortieren}) &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdots n} \frac{1}{k!} \\
 &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\
 (\text{Induktion : } k! \geq 2^{k-1}) &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\
 (\text{Geom.Summe}) &\leq 1 + \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} \leq 3.
 \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Später werden wir zeigen:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

**Bemerkung.** Die Zahl  $e$  spielt bei kontinuierlichen Wachstumsvorgängen eine Rolle, z.B. stetige Verzinsung: Kapital  $A$  Zinsatz 100 Prozent. Dann hat man nach einem Jahr bei

- 0 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen :  $A(1 + 1)$
- 1 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen:  $A(1 + 1/2)(1 + 1/2)$
- 2 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen:  $A(1 + 1/3)(1 + 1/3)(1 + 1/3)$
- etc.

**Beispiel - die Zahl  $e(a)$ :** Sei  $a > 0$ . Sei  $x_n := (1 + a/n)^n$ . Dann konvergiert  $(x_n)$ . Wir nennen den Grenzwert  $e(a)$ . (Später:  $e(a) = e^a$ ).

Bew. Wir zeigen Monotonie und Beschränktheit.

*Monotonie:*

$$\begin{aligned}
 x_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \\
 \text{(siehe voriges Bsp.)} &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1) a^k}{n \cdot n \cdots n \cdot k!} \\
 \text{(Für } 0 \leq l < r \text{ gilt } l/r \leq (l+1)/(r+1)\text{)} &\leq \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1) a^k}{(n+1) \cdot (n+1) \cdots (n+1) \cdot k!} \\
 &\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1) a^k}{(n+1) \cdot (n+1) \cdots (n+1) \cdot k!} \\
 &= x_{n+1}.
 \end{aligned}$$

(Alternativer direkter Beweis der Monotonie: Sei  $a > 0$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right) \left(\frac{1 + \frac{a}{n+1}}{1 + \frac{a}{n}}\right)^n \\
 &= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right) \left(\frac{(n+1+a)n}{(n+a)(n+1)}\right)^n \\
 &= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right) \left(\frac{(n+1)n + na}{(n+1)(n+a)}\right)^n \\
 &\geq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right) \left(1 - \frac{a}{(n+1)(n+a)}\right)^n \\
 \text{(Bernoulli)} &\geq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right) \left(1 - \frac{na}{(n+1)(n+a)}\right) \\
 &= \left(\frac{n+1+a}{n+1}\right) \left(\frac{(n+1)(n+a) - an}{(n+1)(n+a)}\right) \\
 \text{(Sortieren } n. \text{ Potenzen)} &= \frac{n^3 + n^2(a+2) + n(1+2a) + a(1+a)}{n^3 + n^2(a+2) + n(1+2a) + a} \\
 \text{(} a > 0 \text{)} &\geq 1)
 \end{aligned}$$

*Beschränktheit:*

Die Betrachtungen des vorigen Beispiels führen auf

$$x_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}.$$

Wähle nun  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \geq 2a$ . Dann gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^n \frac{a^k}{k!} = C + \frac{a^{N+1}}{N!} \sum_{k=N+1}^n \frac{a^{k-N-1}}{(N+1)\cdots k} \leq C + \frac{a^{N+1}}{N!} 3.$$

(Grundidee  $a^k/k!$  ist schließlich  $a/l$  mit  $l$  groß....)



**Beispiel - die Zahl  $e(-a)$ :** Sei  $a > 0$  und  $b = -a < 0$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \frac{1}{e(a)}$ .

Bew. (Übung.= Idee  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^n$  konvergiert gegen 1...

←  
Ende der 13. Vorlesung

**Beispiel -  $k$ -te Wurzel.** (Übung) Sei  $a > 0$  beliebig. Definiere induktiv die Folge  $(x_n)$  durch  $x_0 := c > 0$  beliebig und

$$x_{n+1} := \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) = x_n + \frac{x_n}{k} \left( \frac{a}{x_n^k} - 1 \right).$$

Dann konvergiert die Folge  $(x_n)$  gegen  $\sqrt[k]{a}$ .

Beweisskizze: Offenbar (?Induktion!) gilt  $x_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Bernoulli Ungleichung liefert (Wie?):

$$x_{n+1}^k \geq a$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem gilt nach Definition

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n}{k} \left( 1 - \frac{a}{x_n^k} \right).$$

Damit ist also (Warum?)  $(x_n)_{n \geq 2}$  monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt. Also konvergiert die Folge  $(x_n)$  nach dem Satz gegen einen Grenzwert  $b$ . Dieser Grenzwert erfüllt (Wieso?)

$$b = \frac{1}{k} \left( (k-1)b + \frac{a}{b^{k-1}} \right)$$

und damit gilt dann (Wieso?) auch  $b^k = a$ .

**Bemerkung.** (Für später ;- ) Diese Betrachtungen sind ein Fall des sogenannten Newton Verfahren. Damit kann man (oft) eine Nullstelle einer Funktion  $f$  (hier  $x^k - a$ ) auf folgende Art berechnen:

$n = 0$ : Wähle einen (geeigneten) Wert  $p$ .

$n \implies n + 1$ : Ist  $x_n$  schon bestimmt, so berechnet man  $x_{n+1}$  wie folgt: Bilde die Tangente an  $(x, f(x))$  und berechne ihren Schnitt mit der  $x$ -Achse. Dieser Schnittpunkt ist dann  $x_{n+1}$ . (Zeichnung). Rechnung liefert die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Im konkreten Fall geht es um die Funktion  $f(x) = x^k - a$ .

Der Satz zur Konvergenz monotoner Folgen mag erst einmal speziell erscheinen, da keineswegs jede Folge monoton ist. Aber er hat weitreichende Konsequenzen. Um das näher zu erläutern, brauchen wir noch einen neuen Begriff:

**DEFINITION (Teilfolge).** Sei  $(x_n)_n$  eine Folge und  $(n_k)_k$  eine strikt wachsende Folge in  $\mathbb{N}$  (d.h.  $n_{k+1} > n_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ). Dann heißt  $(x_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(x_n)$ .

**Bemerkungen.**

- Ist  $n_\bullet : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, k \mapsto n_k$  und  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ , so ist  $(x_{n_k})$  gerade die Abbildung  $x \circ n_\bullet$ .
- Für den Begriff der Teilfolge ist nicht wichtig, daß die Werte der Folge in  $\mathbb{R}$  liegen.

**Zeichnung.**  $x_1, x_2 \dots$  vs  $x_{n_1}, x_{n_2} \dots$

**Beispiel.**  $x_n = (-1)^n$ . Dann ist  $(x_{2n})$  die konstante Folge 1 und  $(x_{2n+1})$  die konstante Folge  $-1$ . Diese Teilfolgen sind konvergent also 'schöner' als die Ursprungsfolge. Das ist ein allgemeines Phänomen (s.u.).

Das folgende Lemma zeigt, daß der Unterschied zwischen beliebigen Folgen und monotonen Folgen doch nicht so groß ist.

**LEMMA.** Jede Folge in  $\mathbb{R}$  enthält eine monotone Teilfolge.

*Beweis.* Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Ein  $N \in \mathbb{N}$  heißt Gipfelpunkt von  $(x_n)$ , wenn gilt  $x_N \geq x_n$  für alle  $n \geq N$ . Wir unterscheiden zwei Fälle.

*Fall 1: Es gibt unendlich viele Gipfelpunkte.* Sei  $n_k := k$ -ter Gipfelpunkt. Dann ist  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1}$  die Folge von Gipfelpunkten. Daher gilt also

$$x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $(x_{n_k})$  ist eine monoton fallende Teilfolge.

*Fall 2: Es gibt nur endlich viele Gipfelpunkte.* Wir konstruieren induktiv streng monoton wachsende  $(n_k)$ , so daß  $x_{n_k}$  monoton wachsend ist.  
 $k = 1$ : Wähle  $n_1$  größer als jeden Gipfelpunkt (möglich, da nur endlich viele Gipfelpunkte).

$k \implies k + 1$ : Seien  $n_1 < n_2 \dots < n_k$  schon konstruiert. Da  $n_k$  kein Gipfelpunkt ist ( $n_k > n_1 > \text{jeder Gipfelpunkt}$ ), gibt es ein  $n_{k+1} > n_k$  mit  $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$ .  $\square$

**THEOREM (Satz von Bolzano - Weierstraß).** Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  enthält eine konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Nach dem vorigen Lemma enthält die Folge eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt (da die Ursprungsfolge beschränkt ist). Damit konvergiert die Teilfolge nach dem Satz über Konvergenz monotoner beschränkter Folgen.  $\square$

Wir werden nun Konvergenz von Folgen in  $\mathbb{R}$  charakterisieren. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff.

DEFINITION (Cauchy Folge). *Eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  heißt Cauchy-Folge wenn gilt: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , sodaß für alle  $n, m \geq n_\varepsilon$  gilt*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**Idee.** Folgeglieder sind beliebig nahe aneinander für genügend große  $n$  und  $m$ .

**Bemerkung.** In Quantorisch:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

LEMMA. *Jede konvergente Folge in  $\mathbb{R}$  ist eine Cauchy-Folge.*

*Beweis.* (Eigentlich klar: Wenn Folgeglieder nahe am Grenzwert sind, sind sie auch nahe aneinander. **Zeichnung.**)

Details: Sei  $x_n \rightarrow x$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_\varepsilon$ . Also

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für  $n, m \geq n_\varepsilon$ . □

LEMMA. *Eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  mit einer konvergenten Teilfolge ist konvergent (gegen den Grenzwert der Teilfolge).*

*Beweis.* Sei  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge und sei  $(x_{n_k})$  eine gegen  $x$  konvergente Teilfolge. Wir zeigen  $\lim x_n = x$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben.

Es existiert  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $m, n \geq n_\varepsilon$  (da Cauchy Folge).

Es existiert  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $k \geq k_0$  (da Teilfolge konvergent).

Sei nun  $k \geq k_0$  mit  $n_k \geq n_\varepsilon$  gewählt.

Es gilt für alle  $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir kommen nun zur angekündigten Charakterisierung von Konvergenz.

THEOREM (Cauchy-Kriterium). *Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:*

- (i)  $(x_n)$  ist konvergent.
- (ii)  $(x_n)$  ist eine Cauchy Folge.

*Beweis.* Die Implikation (i)  $\implies$  (ii) haben wir in einem vorausgehenden Lemma gezeigt.

(ii)  $\implies$  (i): Sei  $(x_n)$  eine Cauchy Folge. Dann ist  $(x_n)$  beschränkt (Wähle  $n_1$  mit  $|x_n - x_{n_1}| < 1$  für  $n \geq n_1$ . Dann gilt für  $n \geq n_1$  also  $|x_n| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|$ ...) Damit hat  $(x_n)$  also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Damit ist  $(x_n)$  nach dem vorigen Lemma konvergent.  $\square$

**Bemerkung.** Es handelt sich um eine wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen (siehe folgendes Theorem). Die entscheidende Implikation ist (ii)  $\implies$  (i).

In gewisser Weise charakterisieren (fast) alle in diesem Abschnitt gegebenen Sätze die reellen Zahlen. Genauer gilt folgendes.

**THEOREM** (Die große Charakterisierung). *Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Es ist  $K$  ordnungsvollständig (d.h.  $K = \mathbb{R}$ ).*
- (ii) *Es erfüllt  $K$  das Intervallschachtelungsprinzip und das Archimedische Axiom.*
- (iii) *Jede monotone beschränkte Folge konvergiert, und es gilt das Archimedische Axiom.*
- (iv) *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge, und es gilt das Archimedische Axiom.*
- (v) *Jede Cauchy-Folge konvergiert, und es gilt das Archimedische Axiom.*

*Beweis.* (i)  $\iff$  (ii): Das wurde schon in Kapitel 3 durchgeführt.

(i)  $\implies$  (iii): Siehe oben. (Definiere  $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ....)

(iii)  $\implies$  (iv): Jede beschränkte Folge hat eine monotone Teilfolge (nach dem oben gegebenen Beweis). Damit folgt die gewünschte Implikation.

(iv)  $\implies$  (v): Jede Cauchy Folge ist beschränkt und jede Cauchy Folge mit konvergenter Teilfolge konvergiert (nach den oben gegebenen Beweisen). Damit folgt die gewünschte Implikation.

(v)  $\implies$  (ii): Ist  $I_n$  eine Intervallschachtelung, so bilden die Mittelpunkte (rechte Randpunkte, linke Randpunkte,...) eine Cauchy Folge. Der Grenzwert  $x$  hat die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

### 3. Teilfolgen und Häufungspunkte

Wir kommen nun zu einem wichtigen Konzept, das das Konzept der Teilfolge komplementiert.

**Erinnerung:** Eine Menge  $X$  heißt endlich, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt und eine bijektive Abbildung  $j : \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ . Andernfalls heißt sie unendlich (siehe unten fuer weitere Diskussion).

LEMMA. (*Charakterisierung Häufungspunkt*) Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann sind äquivalent:

- (i) Es gibt eine Teilfolge von  $(x_n)$ , die gegen  $x$  konvergiert.
- (ii) Für alle  $\varepsilon > 0$  ist  $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\}$  eine unendliche Menge

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii): Sei  $\varepsilon > 0$ . Aufgrund von (i) gibt es eine Teilfolge  $x_{n_k}$  mit  $x_{n_k} \rightarrow x$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Damit folgt also für  $k \geq k_\varepsilon$

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Damit gilt

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\} \supset \{n_k : k \geq k_\varepsilon\}$$

und es folgt die Behauptung.

(ii)  $\implies$  (i): Wir konstruieren induktiv eine Teilfolge mit

$$|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}.$$

Diese Teilfolge konvergiert dann also gegen  $x$ .

$k = 1$ : Wähle  $n_1$  mit  $|x_{n_1} - x| < 1$ .

$k \implies k + 1$ : Aufgrund von (ii) ist die Menge

$$A := \left\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{1}{k+1}\right\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_k\}$$

nichtleer. Wir können also  $n_{k+1}$  aus  $A$  wählen z.B. als kleinstes Element von  $A$ . Dann gilt

$$|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}.$$

Damit folgt  $(x_{n_k}) \rightarrow x$  (nach Archimedisches Axiom).  $\square$

**Bemerkung:** Beweis nutzt, daß  $x_n \rightarrow x$  genau dann gilt, wenn fuer alle  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n_k \in \mathbb{N}$  existiert mit  $|x_n - x| < 1/k$  für  $n \geq n_k$ .

DEFINITION (Häufungspunkt). Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Ein  $x \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $(x_n)$ , wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen des vorigen Lemma gilt.

**Bemerkung.** Gibt es eine Teilfolge von  $(x_n)$  die gegen  $\infty / -\infty$  konvergiert, so spricht man manchmal vom uneigentlichen Häufungspunkt  $\infty$  bzw.  $-\infty$ .

**Erkläre** im Spaziergängermodell, das Häufen.

**Beispiele.** (a)  $(-1)^n$  hat die beiden Häufungspunkte  $-1$  und  $1$ .

(b) Die Folge  $x_n$  mit  $x_n = \pi$  für  $n$  hat Rest 0 bei Division durch 3,  $x_n = 7$  für  $n$  mit Rest 1 bei Division durch 3,  $x_n = 42$  für  $n$  mit Rest 2 bei Division durch 3 hat die drei Häufungspunkte  $\pi, 7$  und  $42$ .

(c)  $y_n = x_n + \frac{1}{n}$  (mit  $(x_n)$  aus (b)) hat ebenfalls die Häufungspunkte  $\pi, 7, 42$  (obwohl diese Werte nicht angenommen werden; vgl. Konvergenz!)

**Bemerkung.** Der Satz von Bolzano/Weierstraß lässt sich nun so formulieren: Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  hat einen Häufungspunkt.

Für beschränkte Folgen in  $\mathbb{R}$  gibt es zwei besondere Häufungspunkte, nämlich den größten und den kleinsten Häufungspunkt. Das werden wir jetzt genauer untersuchen:

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

Dann ist die Folge  $(X_N)$  mit

$$X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$$

fallend in  $N$ . Damit existiert

$$\limsup x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} X_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

und wird als 'Limsup' oder 'Limes superior' von  $(x_n)$  bezeichnet. Hier ist der Wert  $+\infty$  möglich (wenn nämlich die Folge nach oben nicht beschränkt ist).

Analog sieht man, daß die Folge  $(X_M)$  mit

$$X_M := \inf\{x_n : n \geq M\}$$

wachsend in  $M$  ist. Damit existiert

$$\liminf x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} X_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k : k \geq n\}$$

und wird als 'Liminf' oder 'Limes inferior' von  $(x_n)$  bezeichnet. Hier ist der Wert  $-\infty$  möglich (wenn nämlich die Folge nach unten nicht beschränkt ist).

**LEMMA** (Charakterisierung von  $\limsup/\liminf$ ). Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

- (i)  $x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- (ii) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt:
  - Es gibt ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $x_k \leq x + \varepsilon$  für alle  $k \geq n_\varepsilon$
  - Die Menge  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x - \varepsilon\}$  ist unendlich.
- (iii) Es ist  $(x_n)$  nach oben beschränkt und es ist  $x$  der größte Häufungspunkt von  $(x_n)$  (d.h.  $x$  ist Häufungspunkt von  $(x_n)$  und es gibt keinen größeren Häufungspunkt).

Analoge Aussagen gelten für  $\liminf$ .

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii): Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei  $X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$ . Wegen  $X_N \rightarrow x$  fallend, existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$x_k \leq \sup\{x_n : n \geq N_0\} < x + \varepsilon$$

für alle  $k \geq N_0$  und es ist  $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x - \varepsilon\}$  unendlich.

(ii)  $\implies$  (iii):  $(x_n)$  nach oben beschränkt. Das folgt aus der ersten Eigenschaft.

$x$  ist Häufungspunkt. Das folgt aus den beiden Eigenschaften und der Charakterisierung von Häufungspunkten.

Es gibt keinen größeren Häufungspunkt. Das ist klar nach der ersten Eigenschaft.

(iii)  $\implies$  (i): Sei  $X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $n_\varepsilon$  mit  $x_n \leq x + \varepsilon$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$  (andernfalls gäbe es nach Bolzano/Weierstrass eine Teilfolge, die gegen eine größere Zahl als  $x$  konvergiert. Widerspruch größter HP.). Damit folgt

$$X_N \leq x + \varepsilon$$

für alle  $N \geq n_\varepsilon$ . Damit folgt

$$\limsup x_n = \lim X_N < x + \varepsilon.$$

Umgekehrt gibt es, da  $x$  ein Häufungspunkt ist, zu jedem  $\varepsilon > 0$  beliebig große  $n$  mit  $x_n \geq x - \varepsilon$ . Damit folgt  $X_N \geq x - \varepsilon$  für alle  $N$ . Damit folgt  $X \geq x - \varepsilon$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung.  $\square$

**FOLGERUNG.** Es gilt  $\limsup x_n < C$  genau dann wenn ein  $C' < C$  und  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n \leq C'$  für alle  $n \geq N_0$ . Entsprechendes gilt für  $\liminf$ .

*Beweis.*  $\implies$ : Das folgt leicht aus (ii).

$\impliedby$ : Das folgt sofort aus der Definition.  $\square$

**FOLGERUNG.** Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

(a) Sei  $(x_{n_k})_k$  eine konvergente Teilfolge. Dann gilt

$$\liminf_n x_n \leq \lim_k x_{n_k} \leq \limsup_n x_n.$$

(b) Es konvergiert  $(x_n)$  genau dann, wenn  $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n \in \mathbb{R}$  und in diesem Fall gilt  $\lim_n x_n = \limsup_n x_n = \liminf_n x_n$ .

*Beweis.* (a) Der Grenzwert  $\lim_k x_{n_k}$  ist ein Häufungspunkt von  $(x_n)$ . Damit folgt die Aussage (a) sofort aus dem vorigen Lemma.

(b) Wenn die Folge konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge (mit demselben Grenzwert) und der größte und der kleinste Häufungspunkt stimmen überein. Nach dem vorigen Lemma ((iii)  $\implies$  (i)) folgt dann die gewünschte Gleichheit von  $\limsup$  und  $\liminf$ .

Umgekehrt folgt aus  $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n \in \mathbb{R}$  und dem vorigen Lemma ((i)  $\implies$  (ii)) auch die Konvergenz.  $\square$

Wir notieren noch einige (leicht zu beweisende) Rechenregeln:

PROPOSITION (Rechenregeln). *Seien  $(x_n)$  und  $(y_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:*

(a)  $\limsup_n x_n = -\liminf(-x_n)$ .

(b)  $\limsup_n(ax_n) = a \limsup_n x_n$  fuer  $a \geq 0$ .

(c)  $\limsup_n(x_n + y_n) \leq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$ .

(d)  $\limsup_n x_n + \liminf_n y_n \leq \limsup(x_n + y_n)$ .

(e)  $\limsup_n(x_n + y_n) = \limsup_n x_n + \lim_n y_n$  (falls  $(y_n)$  konvergiert).

*Beweis.* Hier folgen (a) und (b) direkt aus den Definitionen. Es folgt (c) aus der Definition unter Nutzen von  $\sup\{x_n + y_n : n \geq N\} \leq \sup\{x_n : n \geq N\} + \sup\{y_n : n \geq N\}$ . Es folgt (d) leicht aus den Definitionen und einem Widerspruchsbeweis oder auch direkt aus (a) und (c). Es folgt (e) einfach.  $\square$

←  
Ende der 15. Vorlesung

**Bemerkung.** Ist  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  nicht nach oben beschränkt, so gilt  $\sup\{x_n : n \geq N\} = \infty$  für alle  $N$ . Entsprechend folgt  $\limsup x_n = \infty$ . In diesem Fall gibt es eine Teilfolge, die gegen  $\infty$  konvergiert. Man kann dann also in diesem Sinne  $\infty$  als den größten Häufungspunkt auffassen. Entsprechendes gilt für  $-\infty$  und  $\liminf x_n$ .

**Bemerkung.** (Zweipunkt kompaktifizierung) Wir betrachten  $\pm\infty$  nicht als Punkte einer geeigneten Fortsetzung von  $\mathbb{R}$ . Stattdessen betrachten wir Ausdrücke wie  $x_n \rightarrow \infty$  nur als Kurzschreibweise fuer gewisse Zusammenhaenge. Daß das gut möglich ist, liegt daran, daß man die Punkte  $\pm$  zu  $\mathbb{R}$  dazunehmen kann und damit die sogenannte Zweipunkt kompaktifizierung von  $\mathbb{R}$  erhält. Wir machen das an einer Zeichnung deutlich.



## KAPITEL 5

### Mächtigkeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir die 'Größe' von Mengen mittels der Anzahl ihrer Elemente. Wir werden drei Abstufungen kennenlernen: endliche Mengen, abzählbar unendliche Mengen und überabzählbare Mengen.

DEFINITION. (*Mächtigkeit*)

- Eine Menge  $X$  heißt endlich, wenn sie leer ist oder ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert und eine bijektive Abbildung  $j : A_n = \{1, \dots, n\} \rightarrow X$ . Dann heißt 0 bzw.  $n$  die Mächtigkeit oder Kardinalität von  $X$ .
- Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.
- Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung  $J : \mathbb{N} \rightarrow X$  gibt. In diesem Fall heißt  $J$  eine Abzählung und wir schreiben die Menge auch als  $X = \{J(1), J(2), \dots\}$ .
- Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar unendlich ist, heißt überabzählbar.

**Bemerkung.** Die ersten beiden Definitionen haben wir schon kennengelernt. Es handelt sich also lediglich um eine Erinnerung. In der Definition einer endlichen Menge nutzen wir, daß es keine Bijektion zwischen  $A_n$  und  $A_m$  gibt fuer  $n \neq m$ .

**Beispiele.**

- $\mathbb{N}$  ist abzählbar.
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  abzählbar.
- $\mathbb{Z}$  ist abzählbar. (Bew.  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}, 2n \mapsto n, 2n + 1 \mapsto -n$ .)
- Die Menge der geraden natuerlichen Zahlen ist abzaehlbar. Ebenso ist die Menge der ungeraden natuerlichen Zahlen abzaehlbar.

**Notation.** In dieser Vorlesung nennen wir eine Menge abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Diese Verwendung des Begriffes 'abzählbar' ist nicht einheitlich.

Wir werden nun das Prinzip der Wohlordnung benutzen: Jede nicht-leere Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{N}$  hat ein kleinstes Element.

Anschaulich klar: Laufe  $\mathbb{N}$  beginnend bei 1 ab, bis man auf die Menge trifft. Details hier: Sei  $M$  eine solche Teilmenge. Angenommen:  $M$  hat kein kleinstes Element. Dann ist  $B := \{n \in \mathbb{N} : \{1, \dots, n\} \in \mathbb{N} \setminus M\}$  induktiv ( $1 \in B$ : klar.  $n \in B \implies (n+1) \in B$ : klar. Damit ist  $M$  leer.)

LEMMA. Sei  $X$  eine Menge und  $H : \mathbb{N} \longrightarrow X$  surjektiv. Dann ist entweder  $X$  endlich oder abzählbar unendlich.

*Beweis.* Sei  $X$  nicht endlich. Zu zeigen: Es existiert ein  $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$  bijektiv.

Wir konstruieren induktiv ein  $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$  mit

- $\{J(1), J(2), \dots, J(n)\} \supset \{H(1), \dots, H(n)\}$ .
- Die Elemente  $J(1), \dots, J(n)$  sind paarweise verschieden.

Aufgrund des ersten Punktes ist  $J$  surjektiv. Aufgrund des zweiten Punktes ist  $J$  injektiv.

Zur Konstruktion:

$n = 1$ :  $J(1) = H(1)$ .

$n \implies n+1$ : Betrachte  $M := \{k > n : H(k) \notin \{J(1), \dots, J(n)\}\}$ . Dann ist  $M$  nichtleer, da  $X$  unendlich ist. Damit hat  $M$  ein kleinstes Element  $m$ . Dann setzt man  $J(n+1) := H(m)$ . Dann gelten die gewünschten Eigenschaften: Nach Konstruktion ist  $J(n+1)$  von  $J(1), \dots, J(n)$  verschieden. Weiterhin zeigt die Fallunterscheidung  $m = n+1$  und  $m \neq n+1$ , daß  $H(n+1)$  in  $\{J(1), \dots, J(n+1)\}$  enthalten ist.  $\square$

LEMMA. Es sind  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  und  $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  abzählbar. Insbesondere ist  $X \times Y$  abzählbar für alle abzählbaren  $X$  und  $Y$ .

*Beweis.*  $\mathbb{N} \times \{1, \dots, n\}$  abzählbar: Zeichnung.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar: Zeichnung.

Das 'Insbesondere' kann nun auf folgende Art gezeigt werden: Sei  $J_X : \mathbb{N} \longrightarrow X$  bijektiv und  $J_Y : \mathbb{N} \longrightarrow Y$  bijektiv. Weiterhin existiert nach dem schon gezeigten ein bijektives

$$H : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n \mapsto H(n) = (H_1(n), H_2(n)).$$

Dann ist die Abbildung

$$J : \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y, J(n) = (J_X(H_1(n)), J_Y(H_2(n)))$$

surjektiv (und sogar bijektiv).  $\square$

**Bemerkung.** Das Lemma liefert leicht, daß auch  $X_1 \times \dots \times X_n$  abzählbar ist für abzählbare  $X_1, \dots, X_n$ . (Übung: Wie ist es mit abzählbaren Produkten bestellt?)

THEOREM. Es ist  $\mathbb{Q}$  abzählbar.

*Beweis.* Betrachte

$$H : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \times \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{Q}, H(n, m, q) = q \frac{n}{m}.$$

Dann ist  $H$  surjektiv und nach dem vorangehenden Lemma ist  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \times \{-1, 1\}$  abzählbar. Damit folgt die Aussage aus dem ersten Lemma des Abschnitts.  $\square$

**THEOREM.** *Es ist  $\mathbb{R}$  überabzählbar. Tatsächlich ist jedes Intervall positiver Länge in  $\mathbb{R}$  überabzählbar.*

*Beweis.* Angenommen:  $\mathbb{R}$  ist abzählbar.

Dann gibt es eine Abbildung  $J : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathbb{R} = \{J(1), J(2), \dots\}$ . Wir konstruieren nun rekursiv eine Intervallschachtelung  $(I_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit

- $J(n) \notin I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- $|I_{n+1}| = \frac{1}{3}|I_n|$ .

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es einen Punkt  $x$  der zu allen  $I_n$  gehört. Damit stimmt  $x$  dann mit keinem der  $J(n)$  überein (da  $J(n) \notin I_n$ ). Das ist ein Widerspruch.

Es bleibt die  $I_n$  zu konstruieren:

$n = 1$ : Setze  $I_1 := [J(1) + 1, J(1) + 2]$ .

$n \implies (n + 1)$ : Teile  $I_n$  in drei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle. Es kann  $J(n + 1)$  nicht in allen drei Teilintervallen liegen. Wähle für  $I_{n+1}$  ein Teilintervall, das  $J(n + 1)$  nicht enthält.  $\square$

←  
Ende der 16. Vorlesung

**FOLGERUNG.** *(Dichtheit von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ) In jedem Intervall positiver Länge in  $\mathbb{R}$ , gibt es Punkte von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .*

*Beweis.* Nach dem vorigen Satz ist jedes Intervall positiver Länge überabzählbar. Da  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, kann auch der Schnitt von  $\mathbb{Q}$  mit einem solchen Intervall nur abzählbar sein. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Auch wenn ein Intervall positiver Länge 'fast nur' aus Punkten aus  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  besteht, kann es schwierig sein, einen solchen Punkt explizit anzugeben.

Wir diskutieren nun, dass die Potenzmenge einer Menge immer 'echt größer' als die Menge ist.

**PROPOSITION.** *Sei  $X$  eine beliebige Menge und  $P(X)$  die Potenzmenge von  $X$ . Dann gibt es keine surjektive Abbildung  $J$  von  $X$  nach  $P(X)$ .*

*Beweis.* Übung.  $\square$

**Bemerkung.** Die Proposition liefert insbesondere, daß es unterschiedlich 'große' unendliche Mengen gibt. Tatsächlich ist die Anzahl der Teilmengen einer unendlichen Menge nach der Proposition immer echt größer als die Anzahl der Element der Menge. Insbesondere hat also  $\mathbb{N}$  ueberabzaehlbar viele Teilmengen (vgl. Weihnachtzettel fuer einen direkten Beweis).

## KAPITEL 6

### Die komplexen Zahlen

Es geht um einen Erweiterungskörper von  $\mathbb{R}$ , in dem  $x^2 + 1 = 0$  eine Lösung hat. Nimmt man die Existenz eines solchen Körper an und nennt diese Lösung  $i$ , so gehört mit  $a, b \in \mathbb{R}$  dann auch  $a + ib$  zu diesem Körper, und es gilt nach Distributivgesetz

$$(a + ib)(a' + ib') = aa' + iba' + iab' + iibb' = aa' - bb' + i(ba' + ab').$$

Damit ist also die Menge  $a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , unter obiger Multiplikation abgeschlossen. Das motiviert folgenden Satz.

**THEOREM.** *Die Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  versehen mit der Addition*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

*und der Multiplikation*

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

*ist ein Körper mit neutralem Element  $(0, 0)$  der Addition und neutralem Element  $\underline{1} = (1, 0)$  der Multiplikation.*

*Das Inverse bzgl. Addition von  $(a, b)$  ist gegeben durch  $(-a, -b)$ .*

*Das Inverse bzgl. der Multiplikation von  $(a, b) \neq (0, 0)$  ist gegeben durch*

$$\left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

*Beweis.* Direkte Rechnungen (vgl. Algebravorlesung). □

**Zeichnung / Notation.** Gaußsche Zahlenebene, imaginäre Achse, reelle Achse. Obere Halbebene, untere Halbebene.

**DEFINITION.** *Der Körper aus dem vorangehenden Satz wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet.*

**Notation.** Wir schreiben  $i$  für  $(0, 1)$ . Außerdem identifizieren wir ein  $c \in \mathbb{R}$  mit dem Element der Form  $(c, 0) \in \mathbb{C}$ . Damit kann dann  $\mathbb{R}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  aufgefaßt werden. Dann gilt

$$c(a, b) = (c, 0)(a, b) = (ca - 0b, cb + 0a) = (ca, cb).$$

Insbesondere gilt also mit  $\underline{1} = (1, 0)$

$$ci = (c, 0)i = (c, 0)(0, 1) = (0, c) \quad \text{und} \quad c\underline{1} = (c, 0)(1, 0) = (c, 0).$$

Damit lässt sich dann das Element  $(a, b) \in \mathbb{C}$  schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0)\underline{1} + (b, 0)i = a + ib.$$

Das ist gerade die zu Anfang des Kapitels gegebene Darstellung.

**Bemerkung.** Es ist  $\mathbb{C}$  ein Vektorraum ueber  $\mathbb{R}$  (der Dimension 2) mit skalarer Multiplikation  $\lambda \cdot (a, b) := (\lambda a, \lambda b) (= (\lambda, 0)(a, b))$ . Es ist  $\{1, i\}$  ist eine Basis.

PROPOSITION. *Es gilt  $i^2 = -1$ .*

*Beweis.* Das folgt direkt durch Nachrechnen:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Hier nutzen wir im letzten Schritt die schon besprochene Identifikation von  $\mathbb{R}$  mit einer Teilmenge von  $\mathbb{C}$ .  $\square$

DEFINITION. *Für  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  definieren wir den Imaginärteil  $\Im z := b$  und den Realteil  $\Re z := a$ , sowie die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl  $\bar{z} := a - ib$  und  $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ .*

**Beachte.** (a) Komplex Konjugieren bedeutet gerade Spiegeln an der reellen Achse.

(b) Es ist  $|z|$  die *Laenge* von  $z$ . Es gilt  $|z|^2 = z\bar{z}$ .

Folgende Regeln sind einfach zu beweisen.

PROPOSITION. *Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt:*

(a)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .

(b)  $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$  und  $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$  für  $z \neq 0$ .

(c)  $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ .

(d)  $z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

(e)  $|zw| = |z||w|$  und für  $z \neq 0$   $|1/z| = 1/|z|$ .

*Beweis.* Hausaufgabe.  $\square$

**Bemerkung.** Aus (d) ergibt sich ein allgemeines Verfahren zum Umgang mit Bruechen der Form  $A/B$  mit komplexen Zahlen  $A, B$ : Durch Erweitern mit  $\bar{B}$  ergibt sich der Ausdruck  $A\bar{B}/|B|^2$ , der keine komplexen Zahlen mehr im Nenner enthaelt.

PROPOSITION. (*Dreiecksungleichung*) *Für  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

*Beweis.* Sei  $z = a + ib$  und  $w = c + id$ .

*Zwischenbehauptung.* Es gilt  $|ac + bd| \leq |z||w|$ .

Bew. Ohne Einschraenkung  $|z|, |w| \neq 0$ . Reicht nun zu zeigen

$$\left| \frac{a}{|z|} \frac{c}{|w|} + \frac{b}{|z|} \frac{d}{|w|} \right| \leq 1.$$

Das folgt leicht unter Anwenden von  $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$  auf das erste und zweite Produkt im Betrag.

Mit der Zwischenbehauptung und einer kleinen Rechnung ergibt sich nun folgendes:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(ac + bd) + c^2 + d^2 \\ &\leq a^2 + b^2 + 2|ac + bd| + c^2 + d^2 \\ &\leq a^2 + b^2 + 2|z||w| + c^2 + d^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Nach Ziehen der Wurzel folgt die gewünschte Beziehung.  $\square$

**Zeichnung / Bemerkung.** In  $\mathbb{C}$  kann man Dreiecksungleichung gut deuten.

Der Betrag erlaubt es uns ähnlich wie in  $\mathbb{R}$  das Konzept der Konvergenz und der Cauchy Folge zu definieren. Diesem Thema widmen wir uns als nächstes.

**DEFINITION.** Eine Folge  $(z_n)$  in  $\mathbb{C}$  heißt konvergent gegen  $z \in \mathbb{C}$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, sodaß für alle  $n \geq n_\varepsilon$  gilt  $|z_n - z| < \varepsilon$ . Es heißt dann  $z$  Grenzwert der Folge  $(z_n)$ .

Wie schon in  $\mathbb{R}$  kann auch in  $\mathbb{C}$  eine Folge höchstens gegen einen Wert konvergieren und dieser Wert heißt dann DER Grenzwert und wir schreiben  $z = \lim z_n$  oder  $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$ .

Man definiert für  $\varepsilon > 0$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $w$  durch

$$U_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}.$$

Es heißt dann  $U_\varepsilon(w)$  auch die offene  $\varepsilon$ -Kugel um  $w$ .

Allgemein nennt man eine Menge  $U$  eine Umgebung von  $w$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $U_\varepsilon(w) \subset U$ .

**LEMMA.** Für eine Folge  $(z_n)$  in  $\mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}$  sind äquivalent:

- (i) Es konvergiert  $(z_n)$  gegen  $z$ .
- (ii) Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_\varepsilon > 0$  mit  $z_n \in U_\varepsilon(z)$  für alle  $n \geq n_\varepsilon$ .
- (iii)  $|z - z_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Es bedeutet  $z_n \in U_\varepsilon(z)$  gerade  $|z_n - z| < \varepsilon$ . Damit folgt sofort die Äquivalenz von (i) und (ii).

Es bedeutet  $|z_n - z| \rightarrow 0$  gerade, daß fuer alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$||z_n - z| - 0| < \varepsilon$$

für alle  $n \geq n_\varepsilon$ . Mit

$$||z_n - z| - 0| = |z_n - z|$$

folgt dann die Äquivalenz von (iii) und (i).  $\square$

Konvergenz in  $\mathbb{C}$  und Konvergenz in  $\mathbb{R}$  haben viel miteinander zu tun. Tatsächlich lassen sich wesentliche Betrachtungen zu Konvergenz in  $\mathbb{C}$  auf die entsprechenden Betrachtungen in  $\mathbb{R}$  zurückführen. Dazu dient folgende Proposition.

**PROPOSITION** (Abschätzung Real- Imaginärteil via Betrag). *Für  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  gilt*

$$|z| \leq |a| + |b| \text{ sowie } |a|, |b| \leq |z|.$$

*Beweis.* Nach Definition gilt  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Erste Ungleichung: Es gilt

$$a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2.$$

Damit folgt also

$$|z|^2 \leq (|a| + |b|)^2.$$

Da die Wurzelfunktion monoton ist ( $x < y \implies \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ ) folgt damit die Behauptung durch Wurzelziehen.

Zweite Ungleichung: Mit  $a^2, b^2 \leq a^2 + b^2$  folgt wieder aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion

$$|a|, |b| \leq |z|.$$

Das beendet den Beweis.  $\square$

Als erste Folgerung zeigen wir:

**PROPOSITION.** *Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $z_n = a_n + ib_n$  mit  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  d.h.  $a_n = \Re z_n$  und  $b_n = \Im z_n$ . Dann sind äquivalent:*

- (i) *Die Folge  $(z_n)$  konvergiert in  $\mathbb{C}$ .*
- (ii) *Die Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergieren in  $\mathbb{R}$ .*

*In diesem Fall gilt  $\lim z_n = \lim a_n + i(\lim b_n)$  d.h.*

$$\Re(\lim_n z_n) = \lim_n \Re(z_n) \text{ und } \Im(\lim_n z_n) = \lim_n (\Im z_n).$$

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii): Es gelte  $z_n \rightarrow z = a + ib$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert also ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|z_n - z| < \varepsilon$  für  $n \geq n_\varepsilon$ . Dann gilt für  $n \geq n_\varepsilon$  also nach voriger Proposition

$$|a_n - a|, |b_n - b| \leq |z_n - z| < \varepsilon.$$

(ii)  $\implies$  (i).  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ . Sei  $z := a + ib$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert also ein  $n_a \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_a$  und ein  $n_b \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $n \geq n_b$ . Für  $n \geq \max\{n_a, n_b\}$  gilt also nach voriger Proposition

$$|z - z_n| = |a + ib - (a_n + ib_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon.$$

Zur letzten Aussage: Das wurde beim Beweis von (i)  $\implies$  (ii) schon mitgezeigt.  $\square$

←  
Ende der 17. Vorlesung

Damit kann man aus den Rechenregeln für Konvergenz in  $\mathbb{R}$  leicht die folgenden Rechenregeln für Konvergenz in  $\mathbb{C}$  ableiten.

PROPOSITION. (*Rechenregeln*)

(a)  $z_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w \implies z_n + w_n \rightarrow z + w.$

(b)  $z_n \rightarrow z, w_n \rightarrow w \implies z_n w_n \rightarrow zw.$

(c)  $z_n \rightarrow z, z \neq 0, z_n \neq 0 \text{ alle } n \implies 1/z_n \rightarrow 1/z.$

(d)  $z_n \rightarrow z \implies |z_n| \rightarrow |z|.$

Ähnlich wie in  $\mathbb{R}$  definiert man folgende Konzepte.

DEFINITION (Cauchy Folge). *Eine Folge  $(z_n)$  in  $\mathbb{C}$  heißt Cauchy Folge, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, so daß für alle  $n, m \geq n_\varepsilon$  gilt  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .*

THEOREM. *Für eine Folge  $(x_n)$  in  $\mathbb{C}$  sind äquivalent:*

- (i)  $(z_n)$  ist eine Cauchy Folge.
- (ii)  $(z_n)$  ist konvergent.

*Beweis.* Sei  $z_n = a_n + ib_n$  mit  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:  $(z_n)$  Cauchy Folge  $\iff (a_n), (b_n)$  Cauchy Folgen in  $\mathbb{R} \iff (a_n), (b_n)$  konvergent in  $\mathbb{R} \iff z_n$  konvergent. (Dabei verwenden wir im ersten Schritt die obige Proposition zur Abschätzung von Real- und Imaginarteil via Betrag, im zweiten Schritt die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und im dritten Schritt die vorangegangene Proposition.)  $\square$

FOLGERUNG. *Es ist  $\mathbb{C}$  vollständig d.h. jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$  konvergiert.*

**Bemerkung.** Die Vollständigkeit ist eine fundamentale analytische Eigenschaft der komplexen Zahlen.

Da es in  $\mathbb{C}$  keine Anordnung gibt (Warum?  $x^2 + 1 = 0$  hat Lösung!), gibt es auch keine monotonen Folgen und also auch keine Konvergenz monotoner Folgen. Aber es gibt eine komplexe Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Dazu führen wir noch folgenden Begriff ein: Eine Folge  $(z_n)_n$  in  $\mathbb{C}$  heißt beschränkt, wenn ein  $C > 0$  existiert mit  $|z_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

THEOREM. (*Bolzano - Weierstraß - komplex*). *Sei  $(z_n)$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann hat  $(z_n)$  eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Sei  $z_n = a_n + ib_n$  mit  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . Da  $(z_n)$  beschränkt ist, sind auch die Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  beschränkt (nach der Proposition zur Abschätzung von Real- und Imaginarteil via Betrag). Da  $(a_n)$  beschränkt ist, gibt es nach der reellen Version des Satz von Bolzano



- Weierstraß eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k^{(1)}})_k$ . Dann ist aber auch  $(b_{n_k^{(1)}})$  beschränkt und hat also eine konvergente Teilfolge  $(b_{n_k})$ . Dann konvergiert sowohl  $(a_{n_k})$  also auch  $(b_{n_k})$ . Damit konvergiert dann auch  $(z_{n_k})$ .  $\square$

## KAPITEL 7

### Summen und Reihen

Reihen liefern (eigentlich nur) eine spezielle Art, Folgen darzustellen. Diese Art tritt in vielerlei Zusammenhängen auf und ist entsprechend von besonderem Interesse.

**Ziel:** Gegeben eine Folge  $(a_n)$  in  $\mathbb{C}$ . Definiere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

**Problem:** Das Problem sind wieder die '...' oder anders gesagt, die Tatsache, dass es unendlich viele Summanden gibt.

**Lösung.** Summiere über endlich viele Summanden und bilde (falls möglich) den Grenzwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n .$$

**Zeichnung.**

$$S_1: a_1$$

$$S_2: a_1 + a_2$$

$$S_3: a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4: a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

....

DEFINITION (Reihe gleich Folge der Partialsummen). Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Zu  $n \in \mathbb{N}$  ist dann die  $n$ -te Partialsumme der  $(a_n)$  definiert durch

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k .$$

Die Folge  $(S_n)$  dieser Partialsummen wird dann als Reihe mit den Gliedern  $a_n$  bezeichnet. Diese Reihe heißt konvergent (mit Grenzwert  $S$ ), wenn die Folge  $(S_n)$  konvergiert (mit Grenzwert  $S$ ).

**Bemerkung.** Voellig entsprechend definiert man Reihen ueber Folgen, deren Indexmenge nicht  $\mathbb{N}$  sondern  $\mathbb{N} + N$  fuer ein  $N \in \mathbb{Z}$  ist.

**Notation.** Wir schreiben

$$\sum_{k \geq 1} a_k \quad \text{für die Reihe, d.h. die Folge der Partialsummen}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{für den Grenzwert der Reihe, d.h. } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

(falls dieser existiert).

**Bemerkung (Reihen entsprechen Folgen).** Sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann ist  $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$  für  $a_1 = x_1$ ,  $a_n := x_n - x_{n-1}$   $n \geq 2$ . In diesem Sinne lässt sich jede Folge (in  $\mathbb{C}$ ) als Reihe darstellen.

**Beispiel.** (Geometrische Reihe) Ist  $\alpha \in \mathbb{C}$  beliebig und  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$  so ist  $\sum_{k \geq 0} \alpha q^k$  konvergent gegen  $\frac{\alpha}{1-q}$ . (Bew. Es gilt  $|q^n| = |q|^n \rightarrow 0$ . Damit folgt die Aussage aus der Formel für die geometrische Summe.)

**Anwendung.** Sei  $(a_k)_{k \geq N}$  eine beliebige Folge mit  $a_{k+1}/a_k = q$  mit  $|q| < 1$ . Dann gilt

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = a_N \frac{1}{1-q}.$$

Insbesondere gilt also  $\sum_{k=N}^{\infty} \alpha \beta^{k+l} = \alpha \beta^{N+l} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \alpha \beta^{N+l} \frac{1}{1-\beta}$  für  $|\beta| < 1$ .

**Beispiel.**  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$  konvergiert gegen 1.

Bew.  $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ . Die in der zweiten Gleichung genutzte Technik ist unter dem Namen Partialbruchzerlegung bekannt (s. später).

Da es sich um Folgen handelt, gelten für konvergente Reihen natürlich weiterhin die Rechenregeln für konvergente Folgen. Insbesondere gilt folgendes.

**PROPOSITION.** Sind  $\sum_{k \geq 1} a_k$  und  $\sum_{k \geq 1} b_k$  konvergente Reihen, so ist für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  auch die Reihe  $\sum_{k \geq 1} (a_k + \lambda b_k)$  konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + \lambda b_k).$$

Die Grundfrage im Umgang mit Reihen betrifft natürlich die Konvergenz der Reihe. Das werden wir nun untersuchen.

**THEOREM.** (Charakterisierung Konvergenz - Cauchy Kriterium) Sei  $(a_k)$  in  $\mathbb{C}$  gegeben. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Reihe  $\sum_{k \geq 1} a_k$  konvergiert.
- (ii) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|\sum_{k=m+1}^n a_k| < \varepsilon$  für alle  $n_\varepsilon \leq m < n$ . (**Zeichnung.** Endstück der Reihe.)

**Bemerkung.** Es ist  $|\sum_{k=m+1}^n a_k| = |S_n - S_m|$  gerade die Summe über ein 'Endstück' der Reihe.

*Beweis.* Nach Definition bedeutet Konvergenz einer Reihe (d.h. (i)) gerade die Konvergenz der Folge der Partialsummen. Aufgrund der Vollständigkeit von  $\mathbb{C}$  ist diese Konvergenz äquivalent dazu, daß die Partialsummen eine Cauchy-Folge bilden. Das ist aber gerade Bedingung (ii).  $\square$

Das Theorem liefert eine **notwendige** Bedingung für Konvergenz.

**FOLGERUNG (Erster Test auf Konvergenz).** Ist  $\sum_{k \geq 0} a_k$  konvergent, so ist  $|a_k|$  eine Nullfolge (d.h.  $|a_k| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ).

*Beweis.*  $|a_k| = |\sum_{l=k}^k a_l| = |S_k - S_{k-1}| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$   $\square$

←  
Ende der 18. Vorlesung

Diese Bedingung ist nicht hinreichend:

**Gegenbeispiel.** (Harmonische Reihe ist divergent)  $\sum_{k \geq 1} 1/k$  ist divergent (**obwohl**  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ).

Bew.  $1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + \dots + 1/8) + \dots + (\frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}) \dots$

Besonders wichtig sind Reihen mit nichtnegativen Gliedern. Denn darauf lassen sich viele Konvergenzbetrachtungen zurückführen. Für diese Reihen gilt folgendes Lemma.

**LEMMA (Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern).** Sei Folge  $(a_k)$  mit  $a_k \geq 0$  gegeben. Sei  $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ . Dann sind äquivalent:

- (i) Die Reihe  $\sum_{k \geq 1} a_k$  ist konvergent (d.h.  $(S_n)$  konvergent).
- (ii) Die Reihe  $\sum_{k \geq 1} a_k$  ist beschränkt (d.h.  $\sup S_n < \infty$ ).
- (iii) Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$a_n + a_{n+1} + \dots + a_m < \varepsilon$$

für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n_\varepsilon \leq n < m$ .

*Beweis.* Wegen  $a_k \geq 0$  ist  $(S_n)$  monoton wachsend. Damit sind Konvergenz (i) und Beschränktheit (ii) äquivalent. Weiterhin ist Konvergenz in  $\mathbb{R}$  äquivalent dazu, daß  $(S_n)$  eine Cauchy Folge ist. Das bedeutet aber gerade (iii) (nach dem Cauchy-Kriterium).  $\square$

**Notation.** Ist  $a_k \geq 0$ , so schreiben wir  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ , wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt. Andernfalls schreiben wir  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ .

Für Reihen erweist sich eine Verschärfung des Begriff der Konvergenz als sinnvoll. Dies ist der Punkt, an dem sich die Theorie der Reihen von der Theorie der Folgen unterscheidet.

**DEFINITION.** Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann heißt die Reihe  $\sum_{k \geq 1} a_k$  absolut konvergent, wenn  $\sum_{k \geq 1} |a_k|$  konvergiert, d.h. wenn gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

**Bemerkung.**

- Für Reihen mit nichtnegativen Gliedern ist Konvergenz gleichbedeutend mit absoluter Konvergenz.
- Absolute Konvergenz / Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder der Reihe abändert. (Es geht immer nur um  $a_k$  mit großen  $k$ .)

**Beispiel.** (Geometrische Reihe) Ist  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$ , so ist  $\sum_{k \geq 1} \alpha q^k$  absolut konvergent (gegen  $\frac{\alpha}{1-q}$ ). Ist  $|q| \geq 1$ , so ist die Reihe nicht konvergent.

Bew. Es gilt  $|\alpha q^n| = |\alpha| |q|^n$ . Damit folgt absolute Konvergenz der Reihe für  $|q| < 1$  (s.o.). Ist  $|q| \geq 1$ , so ist  $q^n$  keine Nullfolge und es folgt Divergenz.

**THEOREM** (Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz). Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Ist  $\sum_{k \geq 0} a_k$  absolut konvergent, so ist  $\sum_{k \geq 0} a_k$  konvergent.

*Beweis.* Das folgt eigentlich sofort aus dem Cauchy Kriterium. Hier sind die Details: Sei  $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ . Zu zeigen:  $(S_n)$  ist Cauchy Folge. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Aufgrund der absoluten Konvergenz, konvergiert  $\sum_{k \geq 1} |a_k|$ . Damit existiert also nach dem Lemma ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$$

für alle  $n, m \geq n_\varepsilon$ . Damit gilt also für  $n, m \geq n_\varepsilon$  mit  $n < m$

$$|a_n + a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Cauchy-Kriterium.  $\square$

**Bemerkung.** Es ist absolute Konvergenz tatsächlich strenger als Konvergenz. Denn es gibt Reihen, die konvergieren aber nicht absolut konvergieren. Ein Beispiel ist gegeben durch die Reihe ueber  $a_k := (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ . Dann gilt:

- $\sum |a_k|$  nicht konvergent (harmonische Reihe).
- Es ist aber  $\sum_{k \geq 1} a_k$  konvergent (nach Leibniz Kriterium, s.u.)

**Bemerkung.** (Absolute Konvergenz stabil bei Umordnungen) Absolute Konvergenz ist stabil unter Umordnungen (s.u.). Konvergente aber nicht absolut konvergente Reihen sind extrem instabil unter Umordnung (s.u.). Daher ist absolute Konvergenz oft wesentlich nützlicher als Konvergenz, wenn es um Reihen geht.

**PROPOSITION** (Dreieckungleichung für Reihen). Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Existiert  $\sum a_k$ , so gilt  $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ , wobei die rechte Seite den Wert unendlich hat, wenn die Summe nicht absolut konvergiert.

*Beweis.* Es reicht den Fall zu betrachten, daß  $\sum a_k$  absolut konvergiert. Da Betrag mit Konvergenz von Folgen verträglich ist, gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Hier verwenden wir die Dreiecksungleichung fuer endliche Summen im vorletzten Schritt.  $\square$

**THEOREM** (Majorantenkriterium). Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Gibt es  $k_0 \in \mathbb{N}$  und  $b_k \geq 0$  mit

- $|a_k| \leq b_k$  für  $k \geq k_0$  und
- $\sum_{k \geq k_0} b_k < \infty$ ,

so ist  $\sum a_k$  absolut konvergent.

*Beweis.* Nach dem Lemma zur Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern reicht es

$$\sup \sum_{k=1}^n |a_k| < \infty$$

zu zeigen. Nach der zweiten Voraussetzung gibt es  $C \geq 0$  mit  $\sum_{k=k_0}^n b_k \leq C$  für all  $n \geq k_0$ . Damit folgt fuer  $n \geq k_0$  dann

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + \sum_{k=k_0}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + C.$$

Fuer  $n \leq k_0$  gilt natuerlich sowieso

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k| + C.$$

Damit ergibt sich die gewuenschte Beschraenktheit.  $\square$

**Beispiel.** (Dezimalzahldarstellung) Ist  $(a_n)$  eine Folge mit Werten in  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , so konvergiert

$$\sum_{k \geq 1} a_k 10^{-k}$$

absolut.

Bew. Sei  $b_k := 9/10^k$ . Dann gilt  $|a_k 10^{-k}| \leq b_k$  und  $\sum b_k$  existiert (da geometrische Reihe).

**Weitere Beispiele.**

- $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  konvergiert absolut.

Bew.  $0 \leq 1/k^2 \leq 1/k(k-1)$  und  $\sum 1/k(k-1)$  konvergent.

Nun folgt Beh. aus Majorantenkriterium.

- $\sum_{k \geq 1} \frac{n!}{n^n}$  konvergiert absolut.  
 Bew.  $\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \leq 2/n^2$  und  $\sum \frac{1}{n^2}$  konvergiert. Nun folgt Beh. aus Majorantenkriterium.

Man kann das Majorantenkriterium auch umdrehen.

**FOLGERUNG. (Minorantenkriterium)** Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $b_k \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Gilt  $b_k \geq |a_k|$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  ab einem  $k_0$  und ist  $\sum a_k$  divergent, so ist auch  $\sum b_k$  divergent.

*Beweis.* Angenommen  $\sum b_k$  konvergent. Dann folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von  $\sum |a_k|$  absolut konvergent. Damit folgt nach dem Theorem die Konvergenz von  $\sum a_k$ . Das ist ein Widerspruch.  $\square$

### Beispiele.

- $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$  ist divergent.  
 Bew.  $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}$  und  $\sum \frac{1}{n+1}$  divergent (harmonische Reihe).

- Sei

$$a_k := (\text{k-te ungerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k-1}$$

und

$$b_k := (\text{k-te gerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k}.$$

Dann ist  $\sum a_k$  und  $\sum b_k$  divergent.

Bew. Wäre eine der beiden Summen konvergent, so müsste auch die andere konvergieren nach dem Majorantenkriterium. Dann wäre aber auch die harmonische Reihe konvergent.

**THEOREM (Quotientenkriterium).** Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  mit  $a_k \neq 0$  für alle  $k$  ab einem  $k_0$ . Gilt  $q := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$ , so konvergiert  $\sum a_k$  absolut. Gilt  $p := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$ , so divergiert  $\sum a_k$ .

*Beweis.*  $q < 1$ : Sei  $\tilde{q}$  eine Zahl mit  $q < \tilde{q} < 1$ . (Zeichnung.) Wegen  $q = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$  gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \tilde{q}$$

für alle  $k \geq N$ . Das impliziert

$$|a_n| \leq \tilde{q}|a_{n-1}| \leq \dots \leq \tilde{q}^{n-N}|a_N|$$

für alle  $n \geq N$ . Weiterhin ist  $\sum_{n \geq N} |a_N| \tilde{q}^{n-N}$  konvergent (als geometrische Reihe). Damit folgt nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der ursprünglichen Reihe.

$p > 1$ : Ähnlich wie im vorigen Fall schließt man, daß ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|a_{k+1}|/|a_k| \geq 1$$

für alle  $k \geq N$ . Damit folgt

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \dots \geq |a_N| > 0$$

für alle  $k \geq N$ . Also ist  $|a_k|$  keine Nullfolge. Damit konvergiert die Reihe nicht.  $\square$

→  
Ende der 19. Vorlesung

**Bemerkung.** Für  $q = 1$  bzw.  $p = 1$  ist jedes Konvergenzverhalten möglich.

-  $a_k = \frac{1}{k}$ . Dann  $q = p = \lim \frac{1/(k+1)}{1/k} = \lim \frac{k}{k+1} = 1$  und  $\sum a_k$  divergent.

-  $a_k = \frac{1}{k^2}$ . Dann  $q = p = \lim \frac{1/(k+1)^2}{1/k^2} = \lim \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$  und  $\sum a_k$  konvergent.

**THEOREM (Wurzelkriterium).** Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $q := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ . Gilt  $q < 1$ , so ist  $\sum a_k$  absolut konvergent. Gilt  $q > 1$  so ist  $\sum a_k$  divergent.

*Beweis.*  $q < 1$ : Sei  $\tilde{q}$  mit  $q < \tilde{q} < 1$  und  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \tilde{q}$$

für alle  $k \geq N$ . Damit gilt also

$$|a_k| \leq \tilde{q}^k$$

für alle  $k \geq N$ . Die Reihe  $\sum_{k \geq N} \tilde{q}^k$  konvergiert (geometrische Reihe). Damit folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von  $\sum a_k$ .

$q > 1$ : Es gibt unendlich viele  $k$  mit  $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ , also  $|a_k| \geq 1$ . Damit ist  $|a_k|$  keine Nullfolge.  $\square$

**Bemerkung.** Für  $q = 1$  ist jedes Konvergenzverhalten möglich.

-  $a_k = 1/k$ . Dann  $q = \lim \sqrt[k]{1/k} = 1$  und  $\sum a_k$  divergent.

-  $a_k = 1/k^2$ . Dann  $q = \lim \sqrt[k]{1/k^2} = 1$  und  $\sum a_k$  konvergent.

**Beispiel - Exponentialreihe.** Sei  $z \in \mathbb{C}$  beliebig und  $a_k := z^k/k!$ . Dann ist die Exponentialreihe

$$\sum_{k \geq 0} a_k = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$$

absolut konvergent und der Grenzwert wird als  $e^z$  bezeichnet.

Bew. Das kann man mit Quotientenkriterium oder Wurzelkriterium zeigen. Wir geben (zur Sicherheit ;-)) beide Beweise.



*Quotientenkriterium:* Aufgrund von

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z^{k+1}/(k+1)!|}{|z^k/k!|} = \frac{|z|}{|k+1|} \rightarrow 0 < 1$$

ist die Voraussetzung des Quotientenkriterium erfuehlt.

*Wurzelkriterium:* Aufgrund von

$$\sqrt[k]{\left|\frac{z^k}{k!}\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[k]{k!}} \rightarrow 0 < 1$$

ist die Voraussetzung des Wurzelkriterium erfuehlt. (Hier nutzen wir im letzten Schritt die uns schon bekannte bestimmte Divergenz  $\sqrt[k]{k!} \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ ).

**Bemerkung.** Es ist kein Zufall, daß im vorigen Beispiel sowohl Quotienten- als auch Wurzelkriterium zum Ziel fuehren. Tatsaechlich ist das Wurzelkriterium echt staerker als das Quotientenkriterium d.h.

- wenn das Quotientenkriterium Konvergenz liefert, dann tut dies auch das Wurzelkriterium,
- es gibt Faelle, in denen das Wurzelkriterium Konvergenz liefert aber nicht das Quotientenkriterium.

Allerdings ist das Quotientenkriterium (oft) leichter anzuwenden als das Wurzelkriterium.

Hier skizzieren wir noch kurz Begrueendungen zu den beiden Aussagen ueber die Wurzelkriterium:

- Ist  $b_n > 0$ , so gilt  $\limsup \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ . (siehe Weihnachtzettel). Idee :

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{b_1 \frac{b_2}{b_1} \dots \frac{b_n}{b_{n-1}}} \approx \sqrt[n]{\frac{b_{N+1}}{b_N} \dots \frac{b_n}{b_{n-1}}} \leq \sqrt[n]{q^{n-N}} \approx q.$$

- Es gibt Reihen, deren Konvergenz aus dem Wurzelkriterium folgt aber nicht aus dem Quotientenkriterium. Ein Beispiel ist folgendes:

$$a_k := \begin{cases} 2^{-k} & : \text{ k gerade} \\ 3^{-k} & : \text{ k ungerade} \end{cases}$$

Dann ist  $\sqrt[k]{a_k}$  gleich  $1/2$  oder  $1/3$ , also  $\limsup \sqrt[k]{a_k} = 1/2 < 1$ . Aber es gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}} & : \text{ k gerade} \\ \frac{3^k}{2^{k+1}} & : \text{ k ungerade} \end{cases}$$

Damit wird dann also  $\frac{a_{k+1}}{a_k}$  fuer grosse ungerade  $k$  beliebig gross.

**Beispiele.** Sei  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ . Dann ist die Reihe nicht konvergent, da  $(a_n)$  keine Nullfolge ist. Sei  $b_n = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}$ . Dann folgt aus dem Wurzelkriterium die absolute Konvergenz der entsprechenden Reihe, wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = 1/e < 1$ .

Für reelle Reihen gibt es zwei weitere Konvergenzkriterien, die von der Ordnungsstruktur von  $\mathbb{R}$  Gebrauch machen.

**THEOREM (Leibnizkriterium).** Sei  $(a_k)$  eine monoton fallende Nullfolge in  $\mathbb{R}$  (d.h.  $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq 0$  und  $a_k \rightarrow 0$ ). Dann ist die alternierende Reihe  $\sum (-1)^k a_k$  konvergent.

**Notation.** Eine Reihe heißt alternierend, wenn die zugrundeliegenden Folgenglieder abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben.

*Beweis.* **Zeichnung.** Sei  $n > l$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=l}^n (-1)^k a_k \right| &= |a_l - a_{l+1} + a_{l+2} - \dots a_n| \\ &= a_l - a_{l+1} + \dots a_n \\ &\leq a_l \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hier: Erste Gleichung: Kein Vorzeichen bei  $a_l$ , da Betrag; Zweite Gleichung: betrachte Paare beginnend mit  $a_l$  und eventuell einen einzelnen positiven Summanden am Ende

$$0 \leq (a_l - a_{l+1}) + (a_{l+2} - a_{l+3}) + \dots$$

Denn es ist jeder einzelne Term nichtnegativ aufgrund der Monotonie. Dritte Gleichung: betrachte Paare beginnend mit  $a_{l+1}$  und eventuell einem einzelnen negativen Summanden am Ende

$$a_l \geq a_l + (-a_{l+1} + a_{l+2}) + \dots$$

Vierte Gleichung: Nullfolge.

Damit ist  $\sum (-1)^k a_k$  eine Cauchy-Folge, also konvergent.  $\square$

**Bemerkung - Alternativer Beweis.** Aufgrund der Monotonie der Folge  $(a_n)$  ist die Folge der geraden Partialsummen  $(S_{2n})$  fallend und die Summe der ungeraden Partialsummen  $(S_{2n+1})$  wachsend und es gilt

$$S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n} \geq S_{2n+1}.$$

Damit konvergieren sowohl  $(S_{2n})$  als auch  $(S_{2n+1})$  als beschränkte monotone Folgen. Ihr Grenzwert stimmt überein, da die Differenz gerade eine Nullfolge ist.

**Bemerkung.** Die beiden Voraussetzungen des Theorem sind nötig: Tatsächlich ist die Voraussetzung einer Nullfolge immer nötig für die Konvergenz der entsprechenden Reihe. Gilt nun die Monotonie nicht, kann die Reihe divergieren, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei  $a_n =$

$2/n$ ,  $n$ -gerade;  $a_n = 0$ , sonst. Dann ist  $\sum (-1)^n a_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots$  divergent.

**Beispiel - alternierende harmonische Reihe.** Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$$

ist konvergent. Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe divergiert.

**THEOREM. (Verdichtungskriterium)** Sei  $(a_n)$  eine nichtnegative fallende Folge in  $\mathbb{R}$  (d.h.  $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq 0$ .) Dann konvergiert  $\sum_{k \geq 1} a_k$  genau dann wenn  $\sum_{p \geq 1} 2^p a_{2^p}$  konvergiert.

*Beweis. Zeichnung.* Einteilung von  $\mathbb{N}$  in die Abschnitte von  $[2^p, 2^{p+1})$ .

Für  $p \in \mathbb{N}$  setze  $C_p := \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} a_k$ . ( $2^p$ -Terme). Aufgrund der Monotonie gilt

$$(*) \quad 2^p a_{2^{p+1}} \leq C_p \leq 2^p a_{2^p}.$$

Aufgrund der Nichtnegativität der  $C_p$  und  $a_k$  reicht es jeweils Beschränktheit zu zeigen. Es gilt also

$$\sum_{p \geq 1} 2^p a_{2^p} \text{ konvergent} \iff \sum_{p \geq 1} 2^p a_{2^p} \text{ beschränkt} \stackrel{(*)}{\iff} \sum C_p \text{ beschränkt} \\ \iff \sum a_k \text{ beschränkt} \iff \sum a_k \text{ konvergent.}$$

□

**Beispiel.** Sei  $\alpha > 0$ . Dann gilt  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  konvergent  $\iff \alpha > 1$ .

Bew. Nach dem Verdichtungskriterium ist  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  konvergent genau dann wenn  $\sum 2^p / (2^p)^\alpha = \sum 1 / (2^{\alpha-1})^p$  konvergiert. Letzteres ist eine geometrische Reihe mit  $q = 1/2^{\alpha-1}$ .

Ist  $\alpha > 1$ , so ist  $2^{\alpha-1} > 1$  also  $0 < q < 1$  und die geometrische Reihe konvergiert.

Ist  $\alpha \leq 1$ , so ist  $2^{\alpha-1} \leq 1$  also  $1 \leq q$  und die geometrische Reihe divergiert.

←-----  
Ende der 20. Vorlesung.

Wir betrachten jetzt noch Doppelsummen. Es geht also um

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, (i, j) \mapsto a_{ij} = a(i, j)$$

und wir fragen,

- ob  $\sum a(n, m)$  in irgendeinem Sinne existiert
- und, wenn ja, ob es egal ist, wie man summiert d.h. ob gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^N a(i, j) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=1}^N a(k, N - k + 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

**Zeichnung** zu den verschiedenen Summationsarten!

Das ist von eigenem Interesse und nützlich zum Studium von Produkten von Reihen und Umordnungen.

**Achtung.** Es geht um das Vertauschen von Grenzwerten!

**Gegenbeispiel.** Sei  $a_{ij}$  gegeben, so daß alle Einträge Null sind ausser auf der Diagonalen und der ersten unteren Nebendiagonalen. Seien die Einträge auf der Diagonalen  $1, 2, 4, 8, \dots$  und die Einträge auf der ersten Nebendiagonalen  $-1, -2, -4, -8, \dots$ . Dann sind alle Spaltensummen absolut konvergent und haben den Wert 0. Die  $k$ -te Zeilensumme ist absolut konvergent und hat den Wert  $2^{k-1}$ .

**Idee der folgenden Betrachtungen:** Gibt es eine gleichmäßige Schranke an die (endlichen Teile) der Doppelsummen, so sitzt die wesentliche 'Masse' in einem (großen) Quadrat. Damit liefern dann alles Summationsarten dasselbe Ergebnis.

**PROPOSITION.** Sei  $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Es gebe  $C \geq 0$  mit  $\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}| \leq C$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

(a)  $\sum a_{\tau(k)}$  für jedes injektive  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  absolut konvergent.

(b) Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| \leq \varepsilon$  für jedes injektive  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  mit  $\sigma(k) \notin \{1, \dots, L\}^2$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* (a) Zu  $n \in \mathbb{N}$  existiert  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\{\tau(1), \dots, \tau(n)\} \subset \{1, \dots, m\}^2$ . Damit folgt

$$\sum_{k=0}^n |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{i,j=1}^m |a_{ij}| \leq C.$$

Da  $n \in \mathbb{N}$  beliebig war, folgt (a).

(b) Sei  $\varepsilon > 0$ . Sei fuer  $N \in \mathbb{N}$

$$S_N := \sum_{k,j=1}^N |a_{kj}|.$$

Dann ist  $(S_N)_N$  monoton wachsend und (nach Voraussetzung) beschränkt. Damit existiert

$$S := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k,l=1}^N |a_{kl}|.$$

(Das ist die Summe über alle  $|a_{ij}|$ .) Insbesondere ist also  $(S_N)$  eine Cauchy-Folge. Daher existiert also ein  $L \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{k,l \in \{1, \dots, N\}^2 \setminus \{1, \dots, L\}^2} |a_{kl}| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

für alle  $N \geq L$ . Ist nun  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  injektiv mit  $\sigma(k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, L\}^2$ , so folgt aus (\*)

$$\sum_{k=0}^m |a_{\sigma(k)}| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k,l=L}^N |a_{kl}| \leq \varepsilon.$$

Das ist die gewünschte Behauptung.  $\square$

**THEOREM (Konvergenz von Doppelsummen).** Sei  $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben. Es gebe ein  $C \geq 0$  mit  $\sum_{ij=1}^m |a_{ij}| \leq C$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Dann existiert  $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$  und es existiert  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$  für jedes  $j \in \mathbb{N}$  und die Reihen

$$\sum_{i \geq 1} \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right), \sum_{j \geq 1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right), \sum_{k \geq 1} \left( \sum_{l=1}^k a_{k-l+1,l} \right)$$

sind absolut konvergent und haben den gleichen Grenzwert, nämlich  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}$ .

**Zeichnung** der Summen, vgl. oben.

*Beweis.* Das folgt aus (a) und (b) der vorigen Proposition:

*Existenz der 'inneren' Summen:* Das folgt aus (a) der vorigen Proposition (z.B.  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $\tau(k) = (i, k) \dots$ )

*Absolute Konvergenz der Doppelsummen:* Das ist klar nach Voraussetzung, etwa

$$\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right| = \sum_{i=1}^m \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq C.$$

(Grenzwert vertauscht mit Beträgen und mit endlichen Summen.)

*Gleichheit der Grenzwerte:* Das folgt aus (b) der vorigen Proposition: In allen Summen wird über beliebig große Quadrate in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  summiert. Nach (b) der vorigen Proposition sind Summen über Terme ausserhalb solcher Quadrate beliebig klein. Damit folgt die Aussage.  $\square$

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus dem Satz.

**FOLGERUNG (Cauchy-Produkt).** Seien  $(b_j)$ ,  $(c_i)$  Folgen in  $\mathbb{C}$  sodass  $\sum b_j$  und  $\sum c_i$  absolut konvergent sind. Dann gilt

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i \right) \left( \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^k c_{k-l+1} b_l$$

**Bemerkung.**  $\sum_{l=1}^k c_{k-l+1} b_l = \sum_{l=1}^k c_l b_{k-l+1}$ .

*Beweis.*  $C := \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$ ,  $B := \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$ . Setze  $a_{ij} := c_i b_j$ . Dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}| = \sum_{i,j=1}^m |c_i b_j| = \sum_{i,j=1}^m |c_i| |b_j| = \sum_{i=1}^m |c_i| \sum_{j=1}^m |b_j| \leq CB < \infty$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Damit erfüllt  $a$  die Voraussetzung des vorigen Satz. Dessen Aussage liefert dann die Behauptung.  $\square$

**Anwendung** (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion):

Für die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  gilt

- $\exp(0) = 1$  und
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$  für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  (Funktionalgleichung)

Insbesondere verschwindet  $\exp$  nirgends und es gilt

$$\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z).$$

*Beweis.*  $\exp(0) = 1$ . Das ist klar.

*Es gilt die Funktionalgleichung.* Das folgt mittels Cauchy-Produkt:

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \exp(z_2) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!} \right) \\ \text{(Cauchy-Produkt)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{z_1^m z_2^{n-m}}{m!(n-m)!} \\ \text{(Erweitern mit } 1 = n!/n!) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} z_1^m z_2^{n-m} \\ \text{(Binomi)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n \\ &= \exp(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Zum 'Insbesondere'. Nach dem schon Bewiesenen gilt

$$1 = \exp(0) = \exp(z - z) = \exp(z) \exp(-z).$$

Das liefert die Aussage.  $\square$

**Bemerkung.** (Übung) Eine stetige (s.u.) Funktion  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $E(x+y) = E(x)E(y)$  ist durch ihren Wert an der Stelle  $x = 1$  eindeutig bestimmt.

Wir kommen nun zur schon angesprochenen Stabilität von absolut konvergenter Reihen unter Umordnung.

**DEFINITION** (Umordnung). Ist  $\sum_{k \geq 1} a_k$  eine Reihe und  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv, so heißt  $\sum_{k \geq 1} a_{\tau(k)}$  eine Umordnung der Reihe  $\sum_{k \geq 1} a_k$ .

**Bemerkung.** Umordnung summiert über 'dieselben' Terme in einer anderen Reihenfolge.

**FOLGERUNG** (Absolute Konvergenz impliziert Stabilität unter Umordnung). Sei  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Ist  $\sum_{k \geq 1} a_k$  absolut konvergent, so ist jede Umordnung absolut konvergent und hat denselben Grenzwert.

*Beweis.* Setze  $c_{ij} := a_{\tau(j)} = a_i$  falls  $i = \tau(j)$  und 0 sonst. **Zeichnung** Dann gilt

- $j$ -te Spalte enthält  $a_{\tau(j)}$  an der  $\tau(j)$ -ten Stelle (und sonst Nullen).
- $i$ -te Zeile enthält  $a_i$  an der Stelle  $j$  mit  $\tau(j) = i$  (und sonst Nullen).

Damit gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} = a_i$$

für jedes  $i \in \mathbb{N}$  und

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{ij} = a_{\tau(j)}$$

für jedes  $j \in \mathbb{N}$  sowie

$$\sum_{i,j=1}^m |c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = C < \infty.$$

Damit liefert der vorige Satz die Behauptung. □

**Nach Hause nehmen.** Wenn die Reihen absolut konvergieren, darf man summieren wie man will und erhält immer den gleichen Grenzwert!

**Gegenbeispiel.** (Voraussetzung der absoluten Konvergenz ist nötig) Betrachte die Reihe

$$1 - 1 + 1/2 - 1/2 + 1/3 - 1/3 \dots$$

Dann gilt für die Partialsummen  $S_n$  also  $S_n = 0$  falls  $n$  gerade und  $S_n = 1/k$  falls  $n = 2k - 1$ . Damit folgt  $S_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Andererseits kann man die Summe so umordnen, daß sie divergiert:

$$(1 + 1/2) - 1 + (1/3 + \dots + 1/k) - 1/2 + (1/(k+1) + \dots + \frac{1}{n}) - 1/3 \dots$$

so daß man immer wieder Summanden  $\geq 1/2$  erhält...

Dieses Verfahren lässt sich verallgemeinern und führt auf den folgenden Satz:

**THEOREM** (Riemannscher Umordnungssatz). *Ist  $(a_k)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\sum a_k$  konvergent aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem  $s \in \mathbb{R}$  eine Umordnung  $\tau$  mit  $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ . Ebenso existieren bestimmt divergente Umordnungen zu  $+\infty$  und  $-\infty$ .*

*Beweis.* Die Grundidee ist, daß Konvergenz der Reihe ohne absolute Konvergenz nur auftreten kann, wenn die Reihe in zwei Teile zerlegt werden kann, die sich zu  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  addieren. Durch geeignetes 'Verschieben' der Balance zwischen diesen beiden Teilen lässt sich dann die gewünschte Konvergenz der Umordnung erzwingen. Hier sind die Details: Teile die Folge  $(a_k)$  in positive und nichtpositive Terme wie folgt: Sei

$$a_k^+ := k\text{-tes positives Element von } (a_k)$$

und

$$a_k^- := -k\text{-tes nichtpositives Element von } (a_k).$$

Setze

$$A^+ := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^+, \quad A^- := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^-,$$

wobei der Wert  $\infty$  möglich ist.

*Behauptung.* Es gilt:

- $A^+ := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^+ = \infty$  und  $A^- := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k^- = \infty$ .
- $(a_n^+)$  und  $(a_n^-)$  sind Nullfolgen.

Bew:  $A^+, A^- = \infty$ : Angenommen  $A^+$  und  $A^-$  endlich: Widerspruch zu  $\sum a_n$  nicht absolut konvergent. Angenommen:  $A^+$  endlich und  $A^-$  unendlich (oder umgekehrt): Widerspruch zu  $\sum a_n$  konvergent.

*Nullfolge*: klar (da Summe konvergiert).

Damit ist die Behauptung beweisen.

Nun gehe so vor: Summiere  $a_k^+$  bis gerade  $s$  überschritten wird; summiere nun  $a_k^-$  bis  $s$  gerade unterschritten wird etc. Wegen  $A^+, A^- = \infty$  kann dieses Verfahren beliebig fortgesetzt werden. Da  $(a_k^+)$  und  $(a_k^-)$  Nullfolgen sind, folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** Mit einer leichten Modifikation lassen sich dann Umordnungen erzeugen, deren zugehörige Reihen zwei Häufungspunkte haben.

**FOLGERUNG** (Absolute Konvergenz äquivalent zu unbedingter Konvergenz). *Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:*

- (i) *Es ist  $\sum a_n$  absolut konvergent.*
- (ii) *Es konvergiert jede Umordnung von  $\sum a_n$  in  $\mathbb{C}$ . ('Unbedingte Konvergenz der Reihe')*

*In diesem Fall haben alle Umordnungen denselben Grenzwert.*



*Beweis.* (i) $\implies$ (ii): s.o.

(ii) $\implies$ (i): Anwenden des Riemanschen Umordnungssatzes auf Realteil und Imaginärteil der Summe liefert absolute Konvergenz von  $\sum \Re a_n$  und  $\sum \Im a_n$ . Damit folgt die Aussage.  $\square$

## Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Stetigkeit von Funktionen ist ein fundamentales Konzept der Analysis, das man als Anwendung des Grenzwertkonzeptes sehen kann. Die Grundidee ist folgende: Eine Funktion  $f$  heißt stetig im Punkt  $p$ , wenn sie Punkte  $q$ , die nahe an  $p$  liegen, auf Werte abbildet, die nahe an  $f(p)$  liegen:

- 'q nahe p impliziert  $f(q)$  nahe  $f(p)$ '.

**DEFINITION (Stetigkeit).** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann heißt  $f$  stetig in  $p \in D$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit

$$|f(q) - f(p)| < \varepsilon$$

für alle  $q \in D$  mit  $|q - p| < \delta$ . Ist  $f$  in jedem  $p \in D$  stetig, so heißt  $f$  stetig auf  $D$ .

Unter Nutzen des Konzeptes der offenen  $r$ -Kugel /  $r$ -Umgebung

$$U_r(z) = \{w : |w - z| < r\}$$

von  $z$  mit Radius  $r > 0$  lässt sich obige Definition der Stetigkeit offenbar auch so ausdrücken: Es heißt  $f$  stetig in  $p$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit

$$f(U_\delta(p) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(p)).$$

Kurz: 'Zu jeder offenen Kugel um  $f(p)$  existiert eine Kugel um  $p$ , die in die Kugel um  $f(p)$  abgebildet wird.' **Zeichnung.**

### Bemerkungen.

- Offenbar schließt diese Definition die Fälle ein, daß  $D \subset \mathbb{R}$  gilt und/oder  $f$  nur reelle Werte annimmt. Diesen Fällen werden wir uns später noch einmal besonders widmen.
- Ist  $p \in D$  ein isolierter Punkt von  $D$  (d.h. es existiert ein  $r > 0$  mit  $\{p\} = D \cap U_r(p)$  Zeichnung), so ist jedes  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  in  $p$  stetig. (Bew. Wähle  $\delta < r$ .)

### Beispiele.

- Die konstante Funktion  $D \rightarrow \mathbb{C} \ x \mapsto c$ , ist stetig.  
Bew. Es kann  $\delta > 0$  beliebig gewählt werden.
- $id : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}, \ x \mapsto x$ , ist stetig.  
Bew. Es kann  $\delta = \varepsilon$  gewählt werden.

- Der Betrag  $|\cdot| : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto |x|$ , ist stetig.  
Bew. Dreiecksungleichung  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  zeigt, daß  $\delta = \epsilon$  gewählt werden kann.
- Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist  $\sqrt[k]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$  stetig  
Bew. Wir zeigen zunächst eine Zwischenbehauptung:

$$|\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x}| \leq \sqrt[k]{|y - x|}$$

für alle  $x, y \geq 0$ .

Beweis der ZB: Ohne Einschränkung sei  $x < y$ . Dann gilt  $\sqrt[k]{y} > \sqrt[k]{x}$ . Es ist also

$$\sqrt[k]{y} \leq \sqrt[k]{y - x} + \sqrt[k]{x}$$

zu zeigen. Es reicht also zu zeigen, daß

$$(\sqrt[k]{y})^k \leq (\sqrt[k]{y - x} + \sqrt[k]{x})^k.$$

Das ist wahr nach dem binomischen Satz.

Nach der ZB kann  $\delta = \epsilon^k$  gewählt werden.

**Bemerkung.** In bisherigen Beispielen konnte  $\delta$  unabhängig von  $x$  gewählt werden konnte. Das wird sich im nächsten Beispiel ändern:

- Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  ist stetig.  
Bew. Es gilt:

$$\exp(z) - \exp(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (z^k - z_0^k) = (z - z_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} z^{k-1-l} z_0^l.$$

Für  $z$  mit  $|z| \leq |z_0| + 1$  können wir dann abschätzen:

$$\begin{aligned} |\exp(z) - \exp(z_0)| &\leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} (|z_0| + 1)^{k-1} \\ &= |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k (|z_0| + 1)^{k-1} \\ (c := |z_0| + 1) &= |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} c^{k-1} \\ &= |z - z_0| \exp(c) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|\exp(z) - \exp(z_0)| \leq C|z - z_0|$$

mit  $C := \exp(c)$ . Für  $z$  mit  $|z| \leq |z_0| + 1$  und  $|z - z_0| < \epsilon/C$  gilt dann also  $|\exp(z) - \exp(z_0)| < \epsilon$ . Damit folgt Stetigkeit (mit  $\delta = \min\{1, \epsilon/C\}$ ).



Ende der 22. Vorlesung.