Höhere Analysis II

Sommersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 1 **Abgabe Montag 26. 4. 2010**

(1) Seien H_1 und H_2 Hilberträume und T ein kompakter Operator von H_1 nach H_2. Zeigen Sie:

(a) Ist P_n eine Folge orthogonaler Projektionen in H_1 mit $P_n x \to x$ für alle $x \in H_1$, so gilt $TP_n \to T$. (Hinweis: Wählen Sie normierte x_n mit $\|T - TP_n\| \leq 2\|(T - TP_n)x_n\|$. Zeigen Sie $(I - P_n)x_n \xrightarrow{w} 0$.)

(b) Ist Q_n eine Folge orthogonaler Projektionen in H_2 mit $Q_n y \to y$ fuer alle $y \in H_2$, so gilt $Q_n T \to T$.

(c) Fuer P_n und Q_n wie in (a) bzw. (b) gilt $Q_n T P_n \to T$.

(d) $Ker(T)^\perp$ ist separabel. (Hinweis: Sei (b_α) eine ONB von $Ker(T)^\perp$. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ höchstens endlich viele α mit $\|Tb_\alpha\| \geq \delta$.)

(e) T ist Normgrenzwert von endlichdimensionalen Operatoren.

(2) Sei H ein Hilbertraum und $v : H \longrightarrow H$ ein beschränkter Operator so dass vv^* und v^*v orthogonale Projektionen sind. Zeigen Sie:

(a) $v = vv^*v$ und $v^* = v^*vv^*$. (Hinweis: Fuer alle beschränkten Operatoren a gilt $\|a\|^2 = \|a^*a\|$. Betrachten Sie $v - vv^*v$.)

(b) $Ker(v) = (1 - v^*v)H$, $Ker(v^*) = (1 - vv^*)H$, $vH = vv^*H$, $v^*H = v^*vH$. (Die Bilder von v und v^* sind also abgeschlossen!)

(3) Sei H ein Hilbertraum. Sei $T \in C_1(H)$ und $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben. Finden Sie $R \in C_p(H)$ und $S \in C_q(H)$ mit $T = RS$ und $\|T\|_1 = \|S\|_q \|R\|_p$.

(4) Sei H ein Hilbertraum. Sei C ein nichttrivialer Untervektorraum des Vektorraum der beschraenkten Operatoren von H nach H. Sei C

- abgeschlossen unter Bilden des adjungierten Operator,
- abgeschlossen unter Multiplikation mit beschraenkten Operatoren (von links und rechts),

- abgeschlossen bzgl. $\|\cdot\|$.

Zeigen Sie, dass dann C alle kompakten Operatoren enthält.

Zusatzaufgabe. (Fredholm'sche Alternative) Sei T ein kompakter Operator im Hilbertraum H. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $\lambda \neq 0$ sind äquivalent:

(i) $(T - \lambda)x = y$ ist für jedes $y \in H$ eindeutig lösbar.

(ii) $(T^* - \overline{\lambda})x = y$ ist für jedes $y \in H$ eindeutig lösbar.

(iii) λ ist nicht Eigenwert von T.

(iv) $\overline{\lambda}$ ist nicht Eigenwert von T^*.

(b) Ist $\lambda \neq 0$ Eigenwert von T, so ist $(T - \lambda)x = y$ genau dann lösbar, wenn y orthogonal zu allen Eigenelementen von T^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

Wir wünschen allen einen guten Start ins Semester!