Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Freitag 15.06. 2012**

(1) (a) Zeichnen Sie $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ für $p = 1/2, 1, 2, \infty$.

(b) Sei $0 < p < 1$ und $n > 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^n$ die Dreiecksungleichung nicht erfüllt.

(2) Sei $1 \leq p < \infty$ und $A \subseteq \ell^p$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist relativkompakt (d.h. $\overline{A}$ ist kompakt).

(ii) A ist beschränkt und

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left(\sum_{i=n}^{\infty} |x(i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Hinweis: $(ii) \Rightarrow (i)$: Benutzen Sie die Beschränktheit um eine punktweise konvergente Teilfolge zu extrahieren (Diagonalfolgentrick). Zeigen Sie dann, dass diese auch in ℓ^p konvergiert.

(3) Zeigen Sie:

(a) Die Normen $\|\cdot\|_p$ auf ℓ^p werden für $p \neq 2$ nicht von einem Skalarprodukt induziert.

(b) Die Supremumsnorm auf $C([0,1])$ wird nicht durch ein Skalarprodukt induziert.

(4) Sei V ein Vektorraum und s ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie, dass

$$|s(x,y)| = s(x,x)^{\frac{1}{2}} s(y,y)^{\frac{1}{2}}$$

genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

Zusatzaufgabe.

Können Sie Kriterien für Kompaktheit, ähnlich denen in Aufgabe 2, für ℓ^∞ bzw. c_0 formulieren?