Analysis I - Notizen

Daniel Lenz

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung: Zwei kleine Rechnungen

Eine Rechnung

Der Kurs wird mit 9 Leistungspunkten (LP) gewertet. Jeder Leistungspunkt entspricht 30h Arbeit. Damit geht es um

$$270h \text{ Arbeit}$$

Davon gehen ab:

$$-90h \quad \text{(6 h Vorlesung und Übung in 15 Wochen)}$$
$$-80h \quad \text{(2 Woche Prüfungsvorbereitung à 40 h).}$$

Damit verbleiben noch 100 h Arbeit. Auf 15 Woche verteilt bedeutet dies ca.

7 h Arbeit/ Woche

also

1 h Arbeit / Tag.

Eine andere Rechnung

Der Stoff der ersten drei Semester wurde beginnend mit Newton und Leibniz um 1670 bis etwa 1920 entwickelt. Es handelt sich also um

250 Jahre Entwicklung.

Bei 45 Wochen für die ersten drei Semester, wird also in einer Woche Vorlesung etwa

$$5 \text{ Jahre Entwicklung} \sim 260 \text{ Wochen}$$

behandelt.

Folgerung

Es muß gearbeitet werden!

Grundlagen

Wir setzen Grundtatsachen der Mengenlehre voraus und erinnern in diesem Kapitel an einige Begriffe und Bezeichnungen.

1. Mengen

Seien X und Y Mengen. Dann bedeutet $Y \subset X$ (lies: Y Teilmenge von X), daß jedes Element von Y auch zu X gehört. Es bezeichnet $X \setminus Y$ (lies: X ohne Y) die Menge der Elemente von X, die nicht zu Y gehören. Der Durchschnitt $X \cap Y$ der Mengen X und Y ist gegeben durch

$$X \cap Y := \{z : z \in X \text{ und } z \in Y\}.$$

Die Vereinigung der Mengen X und Y ist gegeben durch

$$X \cup Y := \{z : z \in X \text{ oder } z \in Y\}.$$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X. Die leere Menge wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
Ist A eine Menge und zu jedem $\alpha \in A$ eine Menge X_α gegeben, so nennt man X_α, $\alpha \in A$, eine Familie von Mengen. Für eine Familie X_α, $\alpha \in A$, von Mengen definiert man

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \{z : \text{z gehört zu (mindestens) einer der Mengen } X_\alpha\}$$

sowie

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha := \{z : \text{z gehört z allen Mengen } X_\alpha\}.$$

Ist X_α, $\alpha \in A$, eine Familie von Mengen und X eine Menge, so gilt (siehe Übung)

$$X \setminus \bigcup_\alpha X_\alpha = \bigcap_\alpha X \setminus X_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_\alpha X\alpha = \bigcup_\alpha X \setminus X_\alpha.$$

Aus zwei Objkten a, b bilden wir das geordnete Paar (a, b). Damit können wir aus zwei Mengen X, Y das kartesische Produkt

$$X \times Y : \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

bilden.

2. Funktionen

Eine Abbildung oder Funktion f von einer Menge X in die Menge Y ist eine Zuordnung, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \longrightarrow Y \text{ oder } X \longrightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Es heißt dann X der Definitionsbereich von f, Y der Wertebereich von f und $Bild(f) := \{f(x) : x \in X\} \subset Y$ das Bild von f. Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $A \subset Y$, so heißt

$$f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$$

das Urbild von A unter f.

Beispiel. Sei X eine beliebige Menge. Dann ist $id_X : X \longrightarrow X$ die Abbildung, die $x \in X$ auf $x \in X$ abbildet. Etwa: $X = \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$.

Die Komposition $g \circ f$ der Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ ist gegeben durch

$$g \circ f : X \longrightarrow Z, x \mapsto g(f(x)).$$

Komposition ist assoziativ d.h. es gilt

$$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ .h$$

(Denn $g \circ (f \circ h)(x) = g((f \circ h)(x)) = g((f(h(x)))) = (g \circ f)(h(x)) = (g \circ f) \circ h(x)$.) Damit können wir also die Klammern weglassen.
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt surjektiv, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $y = f(x)$ (d.h. $Bild(f) = Y$).
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt injektiv, wenn aus $x \neq z$ folgt $f(x) \neq f(z)$.
Ist $f : X \longrightarrow Y$ injektiv und surjektiv, so heißt es bijektiv.

Behauptung. Sei $f : X \longrightarrow Y$ gegeben. Dann sind äquivalent:

(i) f bijektiv.
(ii) Es gibt ein $g : Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

In diesem Fall, ist die Funktion g aus (ii) eindeutig bestimmt. Beweis. (Übung)

Die Funktion g wird Umkehrfunktion von f genannt und (oft) mit f^{-1} bezeichnet.
Schließlich brauchen wir manchmal noch Einschränkungen von Funktionen: Sei $f : X \longrightarrow Y$ gegeben und A eine Teilmenge von X. Dann bezeichnen wir mit f_A oder $f|_A$ die Einschränkung von f auf A gegeben durch

$$f|_A : A \longrightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

3. Relationen

Eine Relation auf eine Menge X ist eine Teilmenge R von $X \times X$. Statt $(x, y) \in R$ schreibt man oft auch $x \overset{R}{\sim} y$ oder $x \sim y$.
Eine Relation auf X heißt

- reflexiv, wenn gilt: $x \sim x$ für alle $x \in X$, (Zeichnung)
- symmetrisch, wenn gilt: $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$, (Zeichnung)
- transitiv, wenn gilt: $x \sim y$ und $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$. (Zeichnung in Übung)

Eine äquivalenzrelation ist eine reflexive, symmetrische, transitive Relation.

Beispiel. $X =$ Bewohner von Jena und

$$R = \{(x, y) : \text{x und y haben am selben Tag Geburtstag}\}.$$

Eine Ordnungsrelation oder Ordnung auf einer Menge X ist eine Relation $\leq$, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Dabei heißt antisymmetrisch, daß

$$x \leq y \text{ und } y \leq x \Longrightarrow x = y.$$

Ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf X, so heißt das Paar $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Eine geordnete Menge heißt total geordnet, wenn für alle $x, y \in X$ immer $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.

'Beispiele'. $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$

4. Verknüpfungen

Eine Abbildung $* : X \times X \longrightarrow X$ heißt Verknüpfung auf X. Man schreibt oft $x * y$ statt $*(x, y)$. Die Verknüpfung $* : X \times X \longrightarrow X$ heißt

- kommutativ, wenn gilt $x * y = y * x$ für alle $x, y \in X$
- assoziativ, wenn gilt $x * (x * z) = (x * y) * z$ für alle $x, y, z \in X$.

Ist die Verknüpfung assoziativ, so kann man die Klammern auch weglassen.

KAPITEL 1

Die natürlichen Zahlen

In diesem Kapitel lernen wir einen axiomatischen Zugang zu den natürlichen Zahlen kennen. Dieser Zugang liefert das Prinzip der vollständigen Induktion und die Möglichkeit der rekursiven Definition. Das werden wir genaür studieren. Der Zugang erlaubt es ebenfalls, die üblichen Rechenregeln und Eigenschaften zu beweisen. Das werden wir nicht verfolgen, da wir diese im folgenden Kapitel als Nebenprodukt einfach erhalten.

Die charakteristische Struktur der natürlichen Zahlen ist folgende:

Zeichnung. $1 - \overset{+1}{-} - > 2 - \overset{+1}{-} - > 3 - \overset{+1}{-} - > 4 - \overset{+1}{-} - > \ldots$.

Das Problem sind die Punkte $'\ldots'$! An der Zeichnung lesen wir ab:

- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger und verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
- Beginnt man bei 1 und bildet sukzessive die Nachfolger, so erhält man alle natürlichen Zahlen.
- Die Zahl 1 ist keine Nachfolger.

Eine präzise Fassung dieser Eigenschaften liefern die **Peano Axiome**.

DEFINITION. *(Peano Axiome) Eine Triple* (N, e, ν) *bestehend aus einer Menge* N *zusammen mit einem ausgezeichneten Element* e *und einer Abbildung* $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ *genügt den Peanoaximonen, wenn gilt:*

(P1) $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ *ist injektiv.*

(P2) *(Induktionsaxiom) Enthält eine Teilmenge* M *von* N *das Element* e *und enthält sie mit jedem Element* n *immer auch* $\nu(n)$*, so gilt* $M = N$.

Es heißt ν *die Nachfolgeabbildung und* $\nu(n)$ *der Nachfolger von* n.

Weiteres Vorgehen: Die Peano Axiome charakterisieren die natürlichen Zahlen in folgendem Sinne: Man kann beweisen, daß es ein System gibt, daß diesen Axiomen genügt (wenn man Existenz einer unendlichen Menge voraussetzt) und daß ein solches System eindeutig bestimmt ist (bis auf Umbennenung). Dieses System werden wir später mit $\mathbb{N}$ bezeichnen. Wir werden die Eindeutigkeit eines solchen Systemes bald beweisen und die Rechenoperationen im nächsten Kapitel einführen.

Bemerkung. (a) Eine Teilmenge M von N mit $e \in M$ und $\nu(n) \in N$ für alle $n \in M$ wird auch induktiv genannt.

(b) Hinter $(P1)$ verbergen sich mehrere Forderungen, insbesondere folgende:

- ν bildet von N nach N ab.
- ν ist injektiv.
- Es ist e kein Nachfolger.

Diese Forderungen zusammen mit $(P2)$ werden liefern, daß

- $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ sogar bijektiv ist (s.u.).

Die vorangegangen vier Spiegelstriche werden manchmal als eigene Axiome aufgelistet.
(c) Das Induktionsaxiom liefert eine Art mit $' \ldots '$ umzugehen.
(d) In den Peano Axiomen ist die Forderung, daß e kein Nachfolger ist, wesentlich. Sie garantiert, daß die Menge unendlich viele Elemente hat. Man kann eine endliche Menge N angeben mit ausgezeichnetem Element e und einer injektiven Abbildung $\nu : N \longrightarrow N$, so daß $(P1)$ und $(P2)$ gelten (Übung).

Folgerung. *Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Dann ist die Abbildung $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ bijektiv (d.h. e ist kein Nachfolger und jedes andere Element von $\mathbb{N}$ ist ein Nachfolger) und es gilt $\nu(n) \neq n$ für alle $n \in N$.*

Beweis. *Bijektivität.* Es reicht zu zeigen, daß ν surjektiv ist.
Sei

$$M := \{e\} \cup \{n \in N : n \text{ ist ein Nachfolger d.h. es existiert } m \in N \text{ mit } \nu(m) = n\}.$$

Dann gilt also:

$e \in M$.
$n \in M$ impliziert $\nu(n) \in M$ (da jeder Nachfolger in M ist).

Aus (P2) folgt also $M = N$.
Es gilt $\nu(n) \neq n$ für alle $n \in N$: Sei T die Menge der $n \in N$ mit $\nu(n) \neq n$. Dann gilt $e \in T$ (klar) und aufgrund der Injektivität von ν gilt auch, dass $n \in T$ impliziert $\nu(n) \in T$. Damit ist T induktiv. □

Ende der 1. Vorlesung

Wir kommen nun zu einer wesentliche Konseqünzen aus den Peanoaxiomen. Diese ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

Prinzip der vollständigen Induktion. Sei (N, e, ν) induktiv. Sei für jedes $n \in N$ eine Aussage $A(n)$ gegeben, sodaß gilt:

- $A(1)$ ist wahr. (Induktionsanfang)
- Aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$. (Induktionsschluss)

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in N$.
Beweis. Sei T die Menge der $n \in N$, so daß $A(n)$ wahr ist. Dann folgt aus dem Induktionsaxiom und der Vorraussetzung, daß $T = N$. Das ist gerade die Aussage. □

Notation. Statt '$A(1)$ wahr' und 'Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$' schreibt man meist '$n = 1$' und '$n \Longrightarrow n+1$'.

'Beispiel.' Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen $S_n := \sum_{k=1}^{n} k$ ist gerade $n(n+1)/2$.
Bew. $n = 1$: klar
$n \Longrightarrow n+1$: $S_{n+1} = (n+1)+S_n = (n+1)+(n+1)n\frac{1}{2} = (n+1)(1+n\frac{1}{2}) = (n+1)(2+n)\frac{1}{2}$.

Eine weitere wesentliche Konseqünz der Peano Axiome ist die Möglichkeit der rekursiven Definition. Um das auszuführen, bedarf es einiger Vorbereitungen. Dabei werden wir einige Folgerungen aus den Peano Axiomen ziehen, die auch schon für sich von Interesse sind.

FOLGERUNG. *(Menge der Zahlen, die grösser als n sind) Es genüge (N, e, ν) den Peanoaxiomen. Dann gibt es zu jedem $n \in N$ eine eindeutige Menge $M_n \subset N$ mit*

(1) $n \notin M_n$
(2) $\nu(n) \in M_n$
(3) *Ist $k \in M_n$ so auch $\nu(k)$.*

Diese Mengen M_n erfüllen $M_e = N \setminus \{e\}$ und $M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}$ für alle $n \in N$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Existenz und Eindeutigkeit von Mengen M_n mit den angegebenen Eigenschaften (1), (2), (3). Sei T die Menge der Elemente $n \in \mathbb{N}$ für die eine eindeutige Menge M_n mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Wir zeigen, daß T induktiv ist.

Es gilt $e \in T$:

Existenz: Die Menge $N \setminus \{e\}$ hat die gewünschten Eigenschaften:

(1) $e \notin N \setminus \{e\}$: klar.
(2) $\nu(e) \in N \setminus \{e\}$: klar (da $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$).
(3) $n \in N \setminus \{e\} \Longrightarrow \nu(n) \in M_e$: klar (da $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$)

Eindeutigkeit: Ist $M_e^{'}$ eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften, so betrachten wir $M := \{e\} \cup M_e^{'}$. Dann gilt $e \in M$ und $n \in M$ impliziert $\nu(n) \in M$ (für $n = e$ wegen (2) und für $n \neq e$ wegen (3)). Damit folgt also nach dem Induktionsaxiom $M = N$ und damit $M_e^{'} = N \setminus \{e\}$. Das zeigt die Eindeutgkeit.

$n \in T$ impliziert $\nu(n) \in T$:

Setze $m := \nu(n)$.

Existenz: Wir betrachten die Menge $M_n \setminus \{m\}$. Diese Menge hat die gewünschten Eigenschaften:

(1) $m \notin M_n \setminus \{m\}$: klar .
(2) $\nu(m) \in M_n \setminus \{m\}$: $m = \nu(n) \in M_n$ wegen $(2)_n$, also $\nu(m) \in M_n$ wegen (3) angewendet auf M_n. Weiterhin $\nu(m) \neq m$ (s.o.).

(3) $l \in M_n \setminus \{m\} \Longrightarrow \nu(l) \in M_n \setminus \{m\}$: $l \in M_n$ impliziert $\nu(l) \in M_n$. Weiterhin $\nu(l) \neq m = \nu(n)$, sonst $n = l$ Widerspruch zu $n \notin M_n$.)

Eindeutigkeit: Ist $M_m^{'}$ eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften, so erfüllt $\{m\} \cup M_m^{'}$ die charakteristischen Eigenschaften der Menge M_n:

(1) $n \notin \{m\} \cup M_m^{'}$: $n \neq m = \nu(n)$ (s.o.) und $n \notin M_m^{'}$ (da sonst $m = \nu(n) \in M_m^{'}$. Widerspruch zu $(2)_m$.
(2) $\nu(n) \in \{m\} \cup M_m^{'}$: klar (da $m = \nu(n)$).
(3) $l \in \{m\} \cup M_m^{'}$ impliziert $\nu(l) \in \{m\} \cup M_m^{'}$: Für $l = m$ wegen $(2)_m$ und für $l \in M_m^{'}$ wegen $(3)_m$.

Aufgrund der schon bewiesenen Eindeutigkeit gilt dann $\{m\} \cup M_m^{'} = M_n$ und damit also $M_m^{'} = M_n \setminus \{m\}$. Das zeigt die Eindeutigkeit.

Die letzte Aussage wurde mitbewiesen. □

FOLGERUNG. *(Menge der Zahlen, die kleiner gleich n sind) Es genüge (N, e, ν) den Peanoaxiomen. Dann gibt es eine eindeutige Familie von Mengen $A_n \subset N$, $n \in N$, mit*

$$A_e = \{e\} \text{ und } A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}.$$

Es gilt $n \in A_n$ für alle $n \in N$. Weiterhin gilt für beliebige $k, n \in N$ noch $A_k \subset A_n$ falls $k \in A_n$ und $A_n \subset A_k$ falls $k \notin A_n$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Existenz und Eindeutigkeit solcher A_n:

Existenz. Seien M_n, $n \in N$, die Mengen aus der vorangehenden Folgerung. Nach der vorangegangenen Folgerung gilt $M_e = N \setminus \{e\}$ und $M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}$. Dann erfüllen die Mengen $A_n := N \setminus M_n$

$$A_e = \{e\}, \text{ sowie } A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$$

für alle $n \in N$.

Eindeutigkeit. Sei $(A_n^{'})$, $n \in N$, eine Familie von Teilmengen von N mit $A_e^{'} = \{e\}$ und $A_{\nu(n)}^{'} = A_n^{'} \cup \{\nu(n)\}$. Sei $M := \{n \in N : A_n = A_n^{'}\}$. Dann sieht man sofort, daß M induktiv ist, und es folgt die Eindeutigkeit.

Die Aussage $n \in A_n$ folgt (mit der Fallunterscheidung $n = e$ und $n \neq e$) für alle $n \in N$ aus den charakteristischen Eigenschaften der A_n.

$A_k \subset A_n$ falls $k \in A_n$:
Sei L die Menge aller $n \in N$, für die gilt $A_k \subset A_n$ falls $k \in A_n$. Dann gilt $e \in L$ sowie $\nu(n) \in L$ falls $n \in L$. Damit folgt $L = N$, und es gilt $A_k \subset A_n$ falls $k \in A_n$.

$A_n \subset A_k$ falls $k \notin A_n$:
Wir müssen zeigen, daß $M_k \subset M_n$ falls $k \in M_n$. Es reicht zu zeigen, daß $M_k = M_k \cap M_n$. Dazu reicht es aufgrund der Eindeutigkeit zu zeigen, daß $M_k^{'} := M_k \cap M_n$ die charakteristischen Eigenschaften von M_k hat. Das folgt einfach:

$k \notin M_k'$: $k \notin M_k$
$\nu(k) \in M_k'$: $\nu(k) \in M_k$ und $\nu(k) \in M_n$ (da $k \in M_n$ und M_n der Eigenschaft (3) geneugt.
$l \in M_k' \Longrightarrow \nu(l) \in M_k'$: klar (da es für beide Bestandteile von M_k' gilt).
Damit ist die Folgerung bewiesen. □

Bemerkung. (a) Für die Menge A_n aus der Folgerung schreiben wir meist $\{1, \ldots, n\}$.
(b) Die Elemente von A_n sind die 'Zahlen' die 'kleiner oder gleich' n sind. Die Elemente von M_n sind die Zahlen die 'grösser' als n sind. Tatsächlich kann man zeigen, daß

$$x \leq y :\Longleftrightarrow A_x \subset A_y$$

eine Ordnungrelation auf N definiert und sogar eine Totalordnung. (Übung. Es muss gezeigt werden, daß y das einzige Element z ist mit $z \in A_y$ und $\nu(z) \in M_y$. Dazu betrachtet man die Menge L aller $y \in N$ mit dieser Eigenschaft. Dann gehört offenbar e zu L. Weiterhin gehört mit n auch $\nu(n)$ zu L. Damit gilt die gewünschte Eigenschaft für alle $y \in N$.) Bezüglich dieser Ordnungsrelation ist N wohlgeordnet, d.h. es gilt, daß jede nichtleere Teilmenge von N ein kleinstes Element besitzt. (Übung. Angenommen: M ist eine nichtleere Teilmenge von N, die kein kleinstes Element besitzt. Zeige dann durch Induktion, daß jedes A_n im Komplement von M liegt. Damit stimmt dieses Komplement mit N überein und M ist die leere Menge.)
(c) Jede Menge, die genausoviele Elemente wie A_n hat, heißt n-elementig.

Ende der 2. Vorlesung

Rekursive Definition von Funktionen. Sei (N, e, ν) induktiv. Sei X eine Menge und für $n \in N$ sei X^n die Menge der Abbildungen von A_n nach X. Seien $a \in X$ sowie zu $n \in N \setminus \{e\}$ Abbildungen $V_n : X^n \longrightarrow X$ gegeben. Dann existiert eine eindeutige Funktion $f : N \longrightarrow X$ mit

- $f(1) = a$
- $f(\nu(n)) = V_n(f|_{A_n})$. Hier bezeichnet $f|_{A_n}$ die Einschränkung von f auf A_n gegeben durch $f|_{A_n} : A_n \longrightarrow X$, $x \mapsto f(x)$.

Bemerkung. Das ist eine präzise Fassung von

$$X^n = \text{Menge der Tupel } (f(1), \ldots, f(n))$$

und

$$f(1) = a, \;\; f(n+1) = V_n(f(1), \ldots, f(n))$$

für alle $n \in N$.

Beweis. (Skizze) Wir zeigen zunächst die *Eindeutigkeit* eines solchen f: Seien f und g zwei Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften. Sei $L := \{n \in N : f|_{A_n} = g|_{A_n}\}$. Dann ist L induktiv (einfach) und muss also mit N übereinstimmen. Das liefert die Eindeutigkeit.

Wir kommen nun zur *Existenzaussage.* Sei $\mathcal{A}(n)$ die Aussage:

$\mathcal{A}(n)$ Es existiert eine eindeutige Funktion $f_n : A_n \longrightarrow X$ mit $f_n(e) = a$ und $f_n(\nu(k)) = V_k(f_n|_{A_k})$ für $k \in A_n$ mit $\nu(k) \in A_n$.

Wir zeigen zunächst durch Induktion, daß $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in N$ wahr ist:
$n = e$: klar. ($f_e(e) = a$.)
$n \Longrightarrow \nu(n)$:
Existenz: Definiere $f_{\nu(n)}$ auf A_n durch f_n und setze es auf $\nu(n)$ als $V_n(f_n(1), \ldots, f_n(n))$. Dann hat $f_{\nu(n)}$ die gewünschten Eigenschaften.
Eindeutigkeit: Das ist einfach. (Auf A_n haben wir keine Wahl, da $\mathcal{A}(n)$ wahr ist, und auf $\nu(n)$ ist der Funktionswert nach der Vorschrift festgelegt.)

Nun zeigen wir, daß die f_n, $n \in N$, miteinander verträglich sind:
Seien $k, n \in N$ gegeben. Dann gilt (s.o.) $A_n \subset A_k$ oder $A_k \subset A_n$. Ohne Einschränkung $A_n \subset A_k$. Aufgrund der Eindeutigkeit müssen dann f_n und f_k auf A_n übereinstimmen. Damit kann man dann die f_n zu einem f auf N 'zusammensetzen', indem man definiert

$$f : N \longrightarrow X, \; f(n) := f_n(n).$$

Dieses f stimmt auf jedem A_n mit f_n überein und hat also die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Bemerkung. ähnlich wie man Funktionen rekursiv definieren kann, kann man auch Mengen rekursiv definieren (siehe Übung).

Damit können wir nun die schon angekündigte Eindeutigkeit der 'natürlichen Zahlen' beweisen.

THEOREM. *(Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen) Es genügen (N_1, e_1, ν_1) und (N_2, e_2, ν_2) den Peano Axiomen. Dann gibt es eindeutige Abbildungen $k : N_1 \longrightarrow N_2$ und $l : N_2 \longrightarrow N_1$ mit*

$$k(e_1) = e_2 \; \text{ und } k(\nu_1(n)) = \nu_2(k(n)) \text{ für alle } n \in N_1$$

bzw.

$$l(e_2) = e_1 \; \text{ und } l(\nu_2(n)) = \nu_1(l(n)) \text{ für alle } n \in N_2.$$

Es gilt $l \circ k = id_{N_1}$ und $k \circ l = id_{N_2}$. Damit sind also l und k bijektiv.

Zeichnung. Kommutatives Diagramm.

Beweis. Wir widmen uns zunächst der Abbildung k:
Existenz von k: Das folgt durch rekursive Definition.
Eindeutigkeit von k: Seien k und k' Abbildungen mit der gewünschten Eigenschaft. Sei $M := \{n \in N_1 : k(n) = k'(n)\}$. Dann gilt nach Definition $e_1 \in M$ und $n \in M$ impliziert $\nu_1(n) \in M$ da

$$k(\nu_1(n)) = \nu_2(k(n)) = \nu_2(k'(n)) = k'(\nu_1(n)).$$

Damit folgt $M = N_1$ aus dem zweiten Peanoaxiom.

Analog können wir Existenz und Eindeutigkeit von l beweisen.

Wir zeigen nun $l \circ k = id_{N_1}$: Sei $S := \{n \in N_1 : l \circ k(n) = n\}$. Dann folgt ähnlich wie eben, daß $S = N_1$.

Die Aussage $k \circ l = id_{N_2}$ lässt sich analog beweisen. $\square$

!!! Das vorangehende Theorem zeigt, daß es (bis auf Umbenennung) nur ein Triple (N, e, ν) gibt, das den Peano Axiomen genügt. Wir bezeichnen dieses eindeutige Tripel ab jetzt als die natürlichen Zahlen und verwenden das Symbol $\mathbb{N}$. Weiterhin schreiben wir dann (meist) 1 statt e und $n+1$ statt $\nu(n)$.

In gewissen Fällen wird es praktisch sein, noch ein weiteres Element 0 zur Verfügung zu haben und mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ zu arbeiten. Auf $\mathbb{N}_0$ zeichnen wir das Element 0 aus und definieren die Nachfolge Abbildung ν_0 auf N wie bisher und $0 + 1 = 1$. Dann erfüllt $(\mathbb{N}_0, 0, \nu_0)$ die Peanoaxiome. (Klar!)

Bemerkung. Wir können nun $\mathbb{N}$ mit einer Addition und einer Multiplikation versehen gemäss:

Addition : $n + m$**:** Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung $S_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursive gemäss

$$S_n(1) = n + 1 := \nu(n) \text{ und } S_n(\nu(m)) := \nu(n+m).$$

Dann liefert $S_n(m)$ eine präzise Fassung des bisher nicht definierten $n + m$.

Multiplikation : kn**:** Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung $M_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursiv gemäss

$$M_n(1) = n \text{ und } M_n(\nu(m)) := M_n(m) + n.$$

Wir setzen $kn := M_n(k)$.

Weiterhin setzen wir $0 + n = n = n + 0$ sowie $0n = n0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Es ist dann möglich zu zeigen, daß Addition und Multiplikation den üblichen Regeln genügen. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt (auf andere Art) eingehen. Hier geben wir aber schon einige Anwendungen:

- Die Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$ (n-Fakultät) wird definiert durch
$$1! = 1 \text{ und } (n+1)! = (n+1)n!.$$
Damit ist sinngemäss $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. Zweckmässig: $0! = 1$.
- Für $a \in \mathbb{N}$ wird die Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto a^n$ definiert durch
$$a^1 := a, \quad a^{n+1} := a \cdot a^n.$$
Zweckmässig: $a^0 := 1$.

- Zu jedem $k \in A_n \cup \{0\}$ existiert ein eindeutiges $m \in N_0$ mit $k + m = n$. Wir schreiben dann auch $n - k$ für m.

  Bew. Sei L die Menge der $n \in N_0$ für die A_n die behauptete Eigenschaft hat. Dann gehört 0 zu L. (Denn $0 + 0 = 0$ und $0 + n = n \neq 0$ für alle $n \in N$. Weiterhin gehört mit n auch $\nu(n)$ zu L: (Übung. Sei $k \in A_{\nu(n)}$. Zu zeigen Existenz und Eindeutigkeit eines m mit $k + m = \nu(n)$.

  Existenz: Falls $k \in A_n$, gibt es $m^{'}$ mit $k + m^{'} = n$ und wir wählen $m := \nu(m^{'})$. Falls $k = \nu(n)$ setzen wir $m := 0$.

  Eindeutigkeit: Es gelte $k + m = \nu(n)$. Ist $m = 0$ so folgt $k = \nu(n)$. Damit ist dann $m = 0$ die einzige Lösung (denn $k + n \in M_k$ wie eine einfache Induktion zeigt und M_k enthält k nicht.)

  Andernfalls ist m ein Nachfolger, also $m = \nu(l)$. Dann gilt $k + \nu(l) = \nu(n)$, also $\nu(k + l) = \nu(n)$ also $k + l = n$. Wegen $n \in L$ ist dann l eindeutig bestimmt und damit auch $m = \nu(l)$.
- Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gerade 2^n. (vgl. Übung)

  Bew. $n = 1$: Es gibt zwei Teilmengen: die leere Menge und gesamte Menge.

  $n \Longrightarrow n + 1$: Sei eine Menge M mit $n + 1$ Elementen gegeben. Sei p eine Element von M. Dann gibt es genausoviele Teilmengen, die p enthalten, wie Teilmengen die p nicht enthalten (!). Es gibt 2^n Teilmengen von M, die p nicht enthalten (also Teilmengen der n elementigen Menge $M \setminus \{p\}$ sind). Insgesamt gibt es also $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen. (Zeichnung: n weisse Kugeln und eine schwarze Kugel.)

Weitere Beispiele in der Übung. Ende der Bemerkung.

Mittels Rekursiver Definition können wir auch $\sum$ und $\prod$ definieren. Das wird später oft nützlich sein. Daher gehen wir nun darauf ein.

Definition von $\prod$:

Ziel: Präzise Version von $\prod_{k=1}^n a_k = a_n \dots a_1$.

Sei K eine Menge mit einer Verknüpfung $\cdot$ (Beispiel: $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$). Seien $a_n \in K$, $n \in N$ gegeben. Wir definieren dazu den Ausdruck $\prod_{k=1}^n a_k$ rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \prod_{k=1}^{n+1} a_k := a_{k+1} \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

(Die Funktion $f : N \longrightarrow K$, $f(n) := \prod_{k=1}^n a_k$, wird also durch die Bedingungen $f(1) = a_1$ und $f(n+1) = a_{n+1} f(n) =: V_n(f_{A_n})$ festgelegt.)

Spezialfall: Sind alle $a_k = q \in K$ so setze man

$$q^n := \prod_{k=1}^{n} q.$$

Dann gilt also

$$q^1 = q, q^{n+1} = qq^n.$$

Definition von $\sum$:

Ziel: Präzise Version von $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \cdot + a_1$.

Sei K eine Menge mit einer Verknüpfung $+$ (Beispiel: $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Seien $a_n \in K$, $n \in N$ gegeben.

Wir definieren dazu den Ausdruck $\sum_{k=1}^{n} a_k$ rekursiv durch

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \sum_{k=1}^{n+1} a_k := a_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(Die Funktion $f : N \longrightarrow K$, $f(n) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ wird also durch die Bedingungen $f(1) = a_1$ und $f(n+1) = a_{n+1} + f(n) =: V_n(f_{A_n})$ festgelegt.)

Spezialfall: Sind alle $a_k = q \in K$ so setzt man

$$nq := \sum_{k=1}^{n} q.$$

Dann gilt also

$$1q = q, (n+1)q = q + nq.$$

Ende der 3. Vorlesung

KAPITEL 2

Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind charakterisiert durch das Zusammenspiel von drei Strukturen:

- Körperaxiome ('Arithmetik')
- Anordnungsaxiome ('$\leq$')
- Vollständigkeitsaxiom ('Existenz von Suprema und Infima') (Liefert Existenz von Grenzwerten)

Die natürlichen Zahlen lassen sich als Teilmengen der reellen Zahlen auffassen und erben entsprechend Arithmetik und Anordnung. Darum geht es in diesem Kapitel. Insbesondere werden wir dabei folgende Zeichnung rechtfertigen:

Zeichnung. Linie mit
- 0 und Spiegelung (für Inversion im Körper),
- Positiv- und Negativteil (für Ordnung)
- ohne Lücken (für Vollständigkeit).
sowie
- natürlichen Zahlen.

1. Die Körperstruktur

Die reellen Zahlen mit Multiplikation und Addition sind ein Körper:

Definition. *(Körper) Eine Menge K zusammen mit den Verknüpfungen*

$$K \times K \longrightarrow K, (x, y) \mapsto x + y \ \ (Addition)$$

und

$$K \times K \longrightarrow K, (x, y) \mapsto x \cdot y \ \ (Multiplikation)$$

heißt Körper, wenn folgende Axiome gelten:
Axiome der Addition:

(A1) *Assoziativgesetz:* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *für alle* $x, y, z \in K$.
(A2) *Kommutativgesetz:* $x + y = y + x$ *für alle* $x, y \in K$.
(A3) *Existenz der* 0*: Es gibt ein* $0 \in K$ *mit* $x + 0 = x$ *für alle* $x \in K$.
(A4) *Existenz des Negativen: Zu jedem* $x \in K$ *existiert ein* $-x \in K$ *mit* $x + (-x) = 0$.

Axiome der Multiplikation:

(M1) *Assoziativgesetz:* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *für alle* $x, y, z \in K$.
(M2) *Kommutativgesetz:* $x \cdot y = y \cdot x$ *für alle* $x, y \in K$.

(M3) *Existenz der* 1*: Es gibt ein* $1 \in K$ *mit* $1 \neq 0$ *und* $x \cdot 1 = x$ *feur alle* $x \in K$*.*
(M4) *Existenz des Negativen: Zu jedem* $x \in K$ *mit* $x \neq 0$ *existiert ein* $x^{-1} \in K$ *mit* $xx^{-1} = 1$*.*

Distributivgesetz:
(D1) *Distributivgesetz:* $x(y+z) = xy + xz$ *für alle* $x, y, z \in K$*.*

Bemerkung. Man kann diese Definition auch so fassen: $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1. Es gilt das Distributivgesetz $x(y+z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in K$.

Notation. $x - y$ statt $x + (-y)$, x/y statt $x \cdot y^{-1}$ und xy statt $x \cdot y$.

Beispiel - (Kleinster Körper) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit Addition $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$ und Multiplikation $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ und $00 = 0$ ist ein Körper. Es handelt sich gerade um das 'Rechnen modulo zwei'. Dabei steht 1 für alle ganzen Zahlen, deren Rest bei Division durch gerade 1 ist (ungerade Zahlen) und 0 für alle ganzen Zahlen, deren Rest bei Division durch 2 gerade 0 ist (gerade Zahlen). Die Rechenregeln lassen sich dann verstehen als *gerade* + *gerade* = *gerade*, *gerade* + *ungerad* = *ungerade*..... Allgemeiner liefert Rechnen modulo N einen Körper, falls N eine Primzahl ist (siehe Algebra).

'Beispiele.' $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Proposition. *(Charakteristische Eigenschaften des Inversen) Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper. Dann gilt:*
(a) $y - x$ *ist die eindeutige Lösung* z *von* $x + z = y$*. Insbesondere sind das Inverse bzgl. der Addition zu einem* x *und das neutrale Element der Addition eindeutig bestimmt. Gilt* $x + y = 0$ *für* $x, y \in K$ *so ist* $x = -y$ *und* $y = -x$*.*

(b) x/y *ist die eindeutige Lösung* z *von* $zy = x$*. Insbesondere ist das Inverse bzgl der Multiplikation zu einem* $y \neq 0$ *und das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt. Gilt* $xy = 1$ *für* $x, y \in K$*, so gilt* $x = y^{-1}$ *und* $y = x^{-1}$*.*

Beweis. (a) *Lösung:* $x + (y - x) = (y - x) + x = y + (-x + x) = y + 0 = y$.
Eindeutig: $x = y + z \Longrightarrow x - y = (y + z) - y = -y + (y + z) = (-y + y) + z = 0 + z = z$.
(b) ähnlich wie (a).

□

Proposition. *(Rechnen mit* 0 *und* 1*) Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper. Dann gilt:*
(a) Es gilt $0 = -0$ *und* $1 = 1^{-1}$*.*
(b) $0x = 0$ *für alle* $x \in K$*.*

(c) $(-1)x = -x$ *für alle* $x \in K$.

(d) $(-x)(-y) = xy$ *für alle* $x, y \in K$.

Beweis.
(a) Es gilt $0 = 0 + 0$ und $1 = 1 \cdot 1$. Damit folgt die Aussage aus der vorigen Proposition.
(b) $0x = (0+0)x = 0x+0x$. Nun Addieren von $-0x$ auf beiden Seiten...
(c) Es ist zu zeigen, daß $z := (-1)x$ das Inverse von x (bzgl. Addition) ist:
$z + x = (-1)x + x = (-1)x + 1x = (-1 + 1)x = 0x = 0$ (nach (c)).
(d) Übung (Reicht zu zeigen $(-1)(-1) = 1$. Das ist klar nach (c).)

□

FOLGERUNG. *(Vertauschen der Inversionen) Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper. Dann ist für jedes* $x \neq 0$ *auch* $-x \neq 0$ *und es gilt* $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.

Beweis. Für $x \neq 0$ gilt auch $-x \neq 0$ (sonst $x = x + 0 = x + (-x) = 0$ Widerspruch). Weiterhin gilt

$$(-x)(-x^{-1}) = (-x)(-1)(x^{-1}) = (-1)(-x)x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

Damit folgt (s.o.) $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.

□

Bemerkung. Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x \in K$ mit $x \neq 0$, so liefert rekursive Definition eine eindeutige Abbildung

$J : \mathbb{N} \longrightarrow K$ mit $J(1_{\mathbb{N}}) = x$ und $J(n + 1_{\mathbb{N}}) = J(n) + x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir definieren dann: $n \cdot x := J(n)$. Als **Beispiel** können wir $K = \mathbb{F}_2$ und $x = 1$ betrachten. Dann gilt für $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F}_2$, $n \mapsto n1_{\mathbb{F}_2}$

$$J(n) = 0 \text{ falls } n \text{ gerade d.h. } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}$$

und

$$J(n) = 1 \text{ falls } n \text{ ungerade d.h. } n = 2k + 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Die folgenden beiden wichtigen Formeln gelten in jedem Körper.

PROPOSITION. *(Geometrische Summenformel) Sei* K *ein Körper und* $x, y \in K$. *Dann gilt für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x \neq y$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(n-1)-k} = \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{n-1-k}.$$

Inbesondere gilt für $q \neq 1$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *die Formel*

$$\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(n-1)-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{(n-1)-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ (Teleskopsumme) &= \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ &= x^n - y^n.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt durch Vertauschen von x und y. Das 'Inbesondere' folgt mit $x = 1$ und $y = q \neq 1$. □

Bemerkung. Man kann die geometrische Summenformel auch durch Induktion beweisen. (Übung).

PROPOSITION. *(Binomischer Satz) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in K$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} (n\;k) x^k y^{n-k}$$

mit

$(n\;k) :=$ *Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n elementigen Menge.*

Diese Zahlen $(n\;k)$ erfüllen die Rekusionsformel

$$(n\;k) + (n\;k-1) = (n+1\;k).$$

Beweis. Die Rekursionsformel folgt direkt: Sei eine $n+1$ elementige Menge gegeben. Sei ein Element p aus dieser Menge fixiert. Dann gibt es $(n\;\;k-1)$ k-elementige Teilmgenen die p enthalten und $(n\;\;k)$ k-elementige Teilmengen, die p nicht enthalten. (Zeichnung: n weisse Kugeln und eine schwarze Kugel....)

Ende der 4. Vorlesung

Nun folgt die Aussage über $(x+y)^n$ durch Induktion:
$n = 1$: Klar.

$n \Longrightarrow (n+1)$: Direkte Rechnung liefert

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\ A(n) &= (x+y)\sum_{k=0}^{n} (n\;k) x^k y^{n-k}.\end{aligned}$$

(Dabei folgt die letzte Gleichung aus der Induktionsannahme für n.) Damit können wir weiter rechnen

$$\begin{aligned} ... &= \sum_{k=0}^{n} (n\ k) x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} (n\ k) x^k y^{n-k+1} \\ (k \to k-1) &= \sum_{k=1}^{n+1} (n\ k-1) x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} (n\ k) x^k y^{n-k+1} \\ (Rekursion) &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (n+1\ k) x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (n+1\ k) x^k y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Bemerkung. (a) Alternative Deutung: 'Ausmultiplizieren' von

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

und bestimmen, wie oft $x^k y^{n-k}$ vorkommt.
(b) Es gilt $(n\ k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (Bew. Induktion und Rekursionsformel. Beachte dabei, daß man zunächst dem Quotienten a/b für natürliche Zahlen einen Sinn geben muss, etwa durch $a/b = c$ genau dann wenn $c \in \mathbb{N}$ die Gleichung m $bc = a$ erfüllt.)

2. Die Ordnungsstruktur

Wir kommen nun zu einer weiteren Struktur auf $\mathbb{R}$, der Ordnungsstruktur.

Definition. *Ein Körper K zusammen mit einer ausgezeichneten Menge K^+, den sogenannten positiven Elementen, heißt angeordnet, wenn die folgenden Eigenschaften (Ordnungsaxiome) gelten:*

- (O1) $K = K^+ \cup \{0\} \cup \{-x : x \in K^+\}$, *wobei die Vereinigung disjunkt ist.*
- (O2) $x, y \in K^+$ *impliziert* $x + y \in K^+$.
- (O3) $x, y \in K^+$ *impliziert* $xy \in K^+$.

Die Elemente $x \in K$ mit $-x \in K^+$ heissen dann negativ. Die Elemente aus $K^+ \cup \{0\}$ heissen auch nicht negativ.

Bemerkungen. (a) Die Struktur einer Anordnung auf einem Körper ist 'mehr' als die Struktur einer Ordnung (s.u.).
(b) '$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$' sind angeordnet.
(c) $\mathbb{F}_2$ lässt sich nicht anordnen. (Denn $1 = -1$.) $\mathbb{C}$ lässt sich nicht anordnen.

Notation. K angeordneter Körper. Wir schreiben

$x > y$ oder $y < x$ falls $x - y \in K^+$.
$x \geq y$ oder $y \leq x$ falls $x - y \in K^+ \cup \{0\}$.

Folgerung. *($\leq$ liefert eine totale Ordnung) Sei K ein angeordneter Körper.*
(a) Sind $x, y, z \in K$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$ so gilt $x \leq z$.
(b) Gilt für $x, y \in K$ sowohl $x \leq y$ als auch $y \leq x$ so folgt $x = y$.
(c) Für $x, y \in K$ gilt dann genau eine der drei folgenden Aussagen:

- $x < y$.
- $y < x$.
- $x = y$.

Beweis. (a) Zu zeigen $z - x \in K^+ \cup \{0\}$. Das folgt aus (02) in folgender Weise:

$$z - x = z + (-y + y) - x = (z - y) + (y - x) \in K^+ \cup \{0\}.$$

(c) Das folgt sofort aus (c), kann aber auch auf folgende Weise bewiesen werden: Für x, y mit $x \leq y$ nd $y \leq x$ gilt $x - y \in K^+ \cup \{0\}$ und $y - x \in K^+ \cup \{0\}$. Damit folgt

$$x - y \in (K^+ \cup \{0\}) \cap (\{-z : z \in K^+\}) \cup \{0\} = \{0\}.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus (O1).
(c) Das ist lediglich eine Umformulierung von (O1). □

Bemerkung. Eine Relation $<$ auf einer Menge B heißt Totalordnung, wenn gilt

- Es ist $<$ transitiv.
- Für alle $x, y \in B$ gilt genau eine der drei folgenden Aussagen: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

In diesem Fall ist $x \leq y :\Longleftrightarrow x < y$ oder $x = y$ eine Ordnung auf B.

Wir untersuchen nun wie die Anordnung mit Bilden des Inversen verträglich ist.

Proposition. *(Inversion und Quadrate) Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt:*
(a) $x < y \Longleftrightarrow -x > -y$. Insbesondere $x < 0 \Longleftrightarrow -x > 0$. .
(b) $x \in K^+ \Longleftrightarrow x^{-1} \in K^+$.
(c) $x^2 \in K^+$ für alle $x \neq 0$. Insbesondere $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

Beweis.
(a) $x < y$ bedeutet gerade $y - x \in K^+$; $-x > -y$ bedeutet gerade $-x + y \in K^+$. Das 'Insbesondere' folgt mit $x = x$ und $y = 0$.

(b) $x \in K^+$, insbesondere $x \neq 0$. Angenommen $x^{-1} \notin K^+$. Dann $-x^{-1} \in K^+$. Damit $-1 = x(-x^{-1}) \in K^+$. Damit $1 = (-1)(-1) \in K^+$. Also $1 \in K^+$ und $(-1) \in K^+$. Widerspruch zu (O1).

(c) folgt aus $x^2 = xx = (-x)(-x)$, da für $x \neq 0$ $x \in K^+$ oder $-x \in K^+$ gilt.

$\square$

Wir kommen nun zu einigen nützlichen Rechenregeln.

Ende der 5. Vorlesung

Proposition. *(Rechenregeln) Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt:*
(a) $x < y,\ x' \leq y' \Longrightarrow x + x' < y + y'$.
(b) $a < b$ *und* $x > 0 \Longrightarrow ax < bx$
(c) $a < b$ *und* $x < 0 \Longrightarrow ax > bx$.
(d) $0 < a < b$ *und* $0 < x < y \Longrightarrow ax < by$.
(e) $0 < x < y \Longleftrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Beweis. (a) ähnlich wie (a): Es gilt nach (O2):

$$(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in K^+.$$

(b) $bx - ax = (b - a)x \in K^+$.
(c) $a < b$ bedeutet $b - a \in K^+$. $x < 0$ liefert $-x \in K^+$ nach voriger Proposition. Damit gilt also

$$ax - bx = (a - b)x = (-1)(a - b)(-1)x = (b - a)(-x) \in K^+.$$

(d) $by - ax = by - bx + bx - ax = b(y - x) + x(b - a) \in K^+$.
(e) $\Longrightarrow$: Nach vorangegangener Proposition gilt $x^{-1}, y^{-1} \in K^+$. Damit können wir $0 < x < y$ mit $x^{-1}y^{-1}$ 'Durchmultiplizieren' und erhalten die Behauptung.
Die umgekehrte Richtung folgt dann durch Ersetzen von x durch x^{-1} und y durch y^{-1}. $\square$

Folgerung. $0 \leq x < y,\ k \in \mathbb{N} \Longrightarrow 0 \leq x^k < y^k$.

In allen angeordneten Körper gilt die folgende Bernoulli Ungleichung. Um sie zu formulieren, brauchen wir noch eine kleine Vorbereitung: In einem Körper K können wir nx mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$ rekursiv definieren durch $1_{\mathbb{N}}x = x$ und $(n + 1)x := nx + x$.

Proposition. *(Bernoulli Ungleichung) Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Induktion nach n.
$n = 1$: $1 + x = 1 + x$.
$n \Longrightarrow n + 1$:

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{n+1} & = & (1+x)(1+x)^n \\ (A(n),\ 1+x \geq 0) & \geq & (1+x)(1+nx) \\ & = & 1+(n+1)x+nx^2 \\ \text{(Kleine Induktion zwischendurch ;-)} & \geq & 1+(n+1)x. \end{array}$$

□

Bemerkungen. (a) Für $x \geq 0$ folgt das natürlich aus dem binomischen Satz. Denn $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n (n\ k) x^k y^{n-k}$ hat nur nichtnegative Summanden.
(b) Wie ist die Lage für $-2 \leq x \leq -1$? (Übung)

In einem angeordneten Körper können wir den Betrag definieren durch

$$|\cdot| : K \longrightarrow K^+ \cup \{0\}, |x| := \begin{cases} x & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -x & : \quad x < 0. \end{cases}$$

Der Betrag beschreibt so etwas wie eine Länge. Das Bilden des Betrages ist in gewisser Weise mit Addition und Multipliktion verträglich:

Proposition. *(Betrag und Multiplikation) Ist K ein angeordneter Körper, so gilt für alle $x, y, z \in K$*

- $|z| = |-z|$
- $|1/x| = 1/|x|$ *(falls $x \neq 0$).*
- $|xy| = |x||y|$

Beweis. *Es gilt* $|z| = |-z|$. Das folgt leicht durch Fallunterscheidung.
Es gilt $|1/x| = 1/|x|$. Das ist klar für $x > 0$. Für $x < 0$ gilt $-x > 0$ und $x^{-1} < 0$ und damit

$$1/|x| = |x|^{-1} = |-x|^{-1} = (-x)^{-1} \stackrel{s.o.}{=} -x^{-1} = |x^{-1}| = |1/x|.$$

Es gilt $|xy| = |x||y|$. Gilt $x = 0$ oder $y = 0$, so folgt die Aussage sofort. Die übrigen Fälle folgen einfach durch Fallunterscheidung (4 Fälle). Etwa:
$x > 0, y > 0$: Dann gilt $xy > 0$ und damit $|xy| = xy = |x||y|$.
$x < 0, y > 0$: Dann gilt $-y > 0$. Damit folgt unter Anwendung des schon gezeigten:

$$|xy| = |(-1)xy| = |x(-y)| = |x||-y| = |x||y|.$$

etc. □

Proposition. *(Dreiecksungleichung) Ist K ein angeordneter Körper, so gilt für alle $x, y, z \in K$*

$$|z| = |-z| \ \textit{und} \ -|z| \leq z \leq |z|$$

und

$$|x+y| \leq |x| + |y| \ \ (\textit{Dreiecksungleichung})$$

also insbesondere

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \ \ (2.\ \textit{Dreieckungleichung}).$$

Beweis. $-|z| \leq z \leq |z|$: Für $z = 0$ ist die Aussage klar. Für $z > 0$ folgt die Aussage leicht. Für $z < 0$ können wir $-z$ betrachten und erhalten die Aussage.

Es gilt $|x+y| \leq |x| + |y|$*:* Reicht z.z. $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x+y) \leq |x| + |y|$.
Nun gilt aber aufgrund des schon gezeigten: $x, -x \leq |x|$ und $y, -y \leq |y|$. Addieren unter Verwendung der Rechenregeln liefert die Aussage.

Zum 'Insbesondere': Aus $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$ folgt $|x| - |y| \leq |x-y|$ ähnlich folgt auch $|y| - |x| \leq |y - x|$. □

In einem angeordneten Körper K können wir ebenso induktiv Minimum und Maximum von endlichen Mengen M definieren:
Ist M eine Menge in K mit einem Element m so definieren wir $\max M = m$ und $\min M = m$.
Sei nun M eine Menge in K mit $n + 1$ Elementen, also $M = M' \cup \{m\}$ mit einer n elementigen Menge M'. Dann definieren wir $\max M$ durch $\max M := m$ falls $m \geq \max M'$ und $\max M := \max M'$ falls $m < \max M'$ und $\min M$ durch $\min M = m$ falls $m \leq \min M'$ und $\min M = \min M'$ falls $m > \min M'$.

3. Ordnungsvollständigkeit

Wir kommen nun zur dritten Eigenschaft der reellen Zahlen, der Ordnungsvollständigkeit. Auf dieser Eigenschaft beruhen die Aussagen über Grenzwerte in der Analysis.

Definition. *(Beschränkte Mengen) Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$ nichtleer.*

(a) Es heißt $S \in K$ eine obere/untere Schranke von M, wenn $m \leq S$ / $m \geq S$ für alle $m \in M$.

(b) Hat M eine obere/untere Schranke, so heißt M nach oben / unten beschränkt. Hat M obere und untere Schranke, so heißt M beschränkt.

Wir fragen nun nach kleinsten oberen / grössten unteren Schränken.

Definition. *Sei K ein angeordneter Körper und M eine nach oben /unten beschränkte Menge in K. Eine obere /untere Schranke S von M heißt dann Supremum /Infimum, wenn für jede weitere obere / untere Schrankte S' gilt $S \leq S'$ / $S \geq S'$. Ist S ein Supremum / Infimum mit $S \in M$, so wird es als Maximum / Minimum bezeichnet.*

Ende der 6. Vorlesung

Wichtig. (a) Das Supremum/Infimum einer beschräkten Menge muss nicht existieren (so hat zum Beispiel in $\mathbb{Q}$ hat die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ keine Supremum. siehe Übung.).

(b) Wenn ein Supremum / Infimum existiert, ist es eindeutig:
(Bew. S, S' Suprema von M. Dann gilt $S \leq S'$ und $S' \leq S$ also $S = S'$.)

Notation. Wir schreiben $\sup M$ bzw. $\inf M$ für das Supremum bzw Infimum einer Menge (falls existent).

PROPOSITION. *(Charakterisierung Supremum) Sei K ein angeordneter Körper und Menge eine Menge in K. Das Supremum der Menge M ist dadurch charakterisiert, daß gilt*

- *$m \leq S$ für alle $m \in M$. (S ist obere Schranke)*
- *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in M$ mit $S - \varepsilon < m$. (Jede kleinere Zahl ist NICHT Schranke d.h. jede Schranke ist mindestens S)*

Für das Infimum gilt entsprechendes (!).

Beweis. Das ist eigentlich nur eine einfache Umformulierung der Definitionen: Es ist S Supremum von M, wenn es eine obere Schrankte von M ist und jede weitere obere Schranke nicht kleiner als S ist. Das bedeutet, daß S Supremum ist, wenn es eine obere Schranke ist und jede kleinere Element nicht obere Schranke ist. □

Damit können wir nun die dritte Eigenschaft der reellen Zahlen definiere.

DEFINITION. *Ein angeordneter Körper heißt ordnungsvollständig, wenn jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt und jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum besitzt.*

Bemerkung. Besitzt in einem angeordneten Körper jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum, so besitzt auch jede nach unten beschrankte Menge ein Infimum. (Übung. Nutzt $\inf M = -\sup(-M)$).

4. Die Charakterisierung

THEOREM. *(Charakterisierung von $\mathbb{R}$). Es ist $\mathbb{R}$ der (bis auf Umbenennung) einzige angeordnete, ordnungsvollständige Körper.*

Beweis. Es ist Existenz und Eineutigkeit zu zeigen. Wir geben nur eine sehr grobe Skizze:

Existenz. Natürliche Zahlen werden mit Addition und Multiplikation versehen; dann Grothendiek Konstruktion für $(\mathbb{N}, +)$. Das liefert $(\mathbb{Z}, +)$. Tatsächlich kann man auch die Multiplikation fortsetzen in der offensichtlichen Weise. Nun Grothendieck Konstruktion auf $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$. Das liefert $(\mathbb{Q}, \cdot)$. Tatsächlich kann man auch die Addition fortsetzen. Das liefert $(\mathbb{Q}, \cdot, +)$. Nun Vervollständigen.

Eindeutigkeit. Konstruiere Abbildung von $\mathbb{Q}$ in die rationalen Zahlen des Vergleichkörpers. Setze diese Abbildung fort. $\square$

Zeichnung. Linie, 0, positive, negative Zahlen, Spiegelung. Keine Lücken!

Wir können die natürlichen Zahlen in natürlicher Weise als eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffasssen.

PROPOSITION. *(Natürliche Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$) Sei $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ die eindeutige Abbildung (s.o.) mit*

$$J(1) = 1_{\mathbb{R}} \text{ und } J(n+1) = J(n) + 1_{\mathbb{R}} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist J injektiv. Weiterhin ist $J(\mathbb{N})$ abgeschlossen under Bildung von Summen und Produkten (d.h. mit $a, b \in J(\mathbb{N})$ gehören auch $a + b$ und ab wieder zu $J(\mathbb{N})$).

Beweis. Injektivität: Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n) \neq J(m) \text{ für alle } m \neq n\}.$$

Wir zeigen, daß L induktiv ist:
Vorüberlegung: Es gilt $J(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bew. Induktion $(J(1) = 1_{\mathbb{R}} > 0,\ J(n+1) = J(n) + 1_R > 0.)$
Es gilt $e \in L$**.** Sei $m \neq e$. Dann gilt $m = k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$J(m) = J(k+1) = J(k) + 1_{\mathbb{R}} = J(k) + J(1) > J(1).$$

Dabei verwenden wir im letzten Schritt die Vorüberlegung. Mit $J(m) > J(1)$ folgt $J(m) \neq J(1)$.

$n \in L$ **impliziert** $n + 1 \in L$**.** Sei $m \neq n + 1$.
Falls $m = 1$ so gilt nach dem schon bewiesenen $J(m) \neq J(n + 1)$ (da $n + 1 \neq 1$).
Falls $m \neq 1$, so gilt $m = k + 1$. Wegen $m \neq n + 1$ und der Injektivität der Nachfolgeabbildung folgt $k \neq n$. Damit können wir unter Nutzen von $J(n) \neq J(k)$ rechnen:

$$J(m) = J(k+1) = J(k) + 1_{\mathbb{R}} \neq J(n) + 1_{\mathbb{R}} = J(n+1).$$

Das liefert die Behauptung.

Abgeschlossenheit unter Addition. Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n) + J(m) \in J(\mathbb{N}) \text{ für alle } m \in N\}.$$

Dann gilt $1 \in L$ da $J(1)+J(m) = 1_R+J(m) = J(m)+1_{\mathbb{R}} = J(m+1) \in J(\mathbb{N})$. Weiterhin gilt $n \in L \Longrightarrow n + 1 \in L$, denn

$$J(n+1) + J(m) = J(n) + 1_{\mathbb{R}} + J(m) = J(n) + J(m+1) \in J(\mathbb{N}),$$

wobei $n \in L$ für die letzten Schritt genutzt wurde.

Abgeschlossenheit unter Multiplikation. Analog. Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n)J(m) \in J(\mathbb{N}) \text{ für alle } m \in N\}.$$

Dann gilt $1 \in L$ da $J(1)J(m) = 1_R J(m) = J(m) \in J(\mathbb{N})$. Weiterhin gilt $n \in L \Longrightarrow n+1 \in L$, denn

$$J(n+1)J(m) = (J(n)+1_\mathbb{R})J(m) = J(n)+1_\mathbb{R}J(m) = J(n)+J(m) \in J(\mathbb{N}),$$

wobei Abgeschlossenheit unter Addition im letzten Schritt genutzt wurde. □

Die vorangegangene Proposition bietet die Möglichkeit auf den natürlichen Zahlen eine Multiplikation und eine Addition einzuführen gemäss

$$n+m := J^{-1}(J(n)+J(m)),\ nm := J^{-1}(J(n)J(m)).$$

Es gilt dann (Übung. Nutzt Injektivität von J.):

$$n+1 = \nu(n) \text{ sowie } n+\nu(m) = \nu(n+m) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$
$$1n = n \text{ sowie } \nu(k)n = kn+n \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit handelt es sich genau um die in einer Bemerkung des letzten Kapitel schon einmal kurz angedeutete Addition und Multiplikation. Aus den entsprechenden Eigenschafter der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ folgen sofort Associativität, Kommutativitat der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sowie das Distributivgesetz

$$(n+m)k = nk + mk.$$

Wichtig! Wir werden im folgenden immer $\mathbb{N}$ als mit dieser Multiplikation und Addition ausgestattet voraussetzen und (oft) nicht zwischen $\mathbb{N}$ und $J(\mathbb{N})$ unterscheiden.

Neben den natürlichen Zahlen bilden noch die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$$

wichtige Teilmengen der reellen Zahlen.

Gute Nachricht. Ab jetzt 'dürfen' wir in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ rechnen, wie wir es gewohnt sind. Dann wir haben die entsprechenden Obejekte und Rechenreglen eingeführt bzw. bewiesen.

Nach Hause nehmen: $\mathbb{R}$ charakterisiert durch Zusammenspiel von drei Strukuren: Körper, Anordnung, Ordnunsvollständigkeit. Die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen bilden Teilmengen von $\mathbb{R}$ (die unter gewissen Operationen abgeschlossen sind).

Ende der 7. Vorlesung

Wir zeigen nun die Existenz von Wurzeln nichtnegativer reeller Zahlen. Diese Existenz beruht wesentlich auf der Ordnungsvollständigkeit. Sie gilt nicht im Körper der rationalen Zahlen (s.o.).

THEOREM. *(Existenz k-ter Wurzeln) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert für jedes $x \geq 0$ ein eindeutiges $y \geq 0$ mit $y^k = x$. Man definiert $\sqrt[k]{x} := y$. Es gilt $\sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$ falls $x < y$.*

Beweis. Der Fall $x = 0$ ist klar. Wir betrachten nur noch $x > 0$.
Eindeutigkeit: Sei $y^k = \widetilde{y}^k$. Ist $y \neq \widetilde{y}$, so können wir ohne Einschränktung annehmen $y < \widetilde{y}$. Das führt auf $y^k < \widetilde{y}^k$. Widerspruch.
Existenz: Sei $M := \{z \geq 0 : z^k \leq x\}$. Dann ist M beschränkt (Falls $x \leq 1$ ist 1 eine Schranke. Falls $x > 1$ ist x eine Schranke.) Ausserdem ist M nichtleer ($0 \in M$). Damit hat M ein Supremum S. Wir zeigen $S^k = x$, indem wir $S^k < x$ und $S^k > x$ zum Widerspruch führen.
Angenommen $S^k < x$: Wir zeigen, daß dann auch $(S + \varepsilon)^k < x$ für genügend kleine $\varepsilon > 0$. Widerspruch zu S obere Schranke.
Hier sind die Details: $D := x - S^k > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ mit

$$0 < \sum_{l=0}^{k-1} (k\ l) S^l (\varepsilon)^{k-l} < x - S^k = D.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
(S+\varepsilon)^k &= \sum_{l=0}^{k} (S+\varepsilon)^l S^{k-l} \\
&= S^k + \sum_{l=0}^{k-1} (k\ l) S^l (\varepsilon)^{k-l} \\
&< S^k + D \\
&= x.
\end{aligned}$$

Angenommen $S^k > x$: Wir zeigen ähnlich wie im ersten Fall, daß dann auch $(S - \varepsilon)^k > x$ für alle genügende kleinen $\varepsilon > 0$. Dann ist also $S - \varepsilon$ eine obere Schranke von M und, offenbar, kleiner als S. Widerspruch: S kleinste obere Schranke.

Monotonie: Sei $x < y$. Nach der gezeigten Eindeutigkeit ist $\sqrt[k]{x} \neq \sqrt[k]{y}$. Wäre $\sqrt[k]{x} > \sqrt[k]{y}$, so folgte $x = ()^k > ()^k = y$. Widerspruch. □

Für rationale Zahlen $a = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ kann man dann definieren

$$x^a := (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Das ist wohldefiniert i.e. es gilt die zweite Gleichung und es hängt nicht von der Darstellung der rationalen Zahl ab. Für reelles $s > 0$ und $x \geq 0$ definiert man dann

$$x^s := \sup\{x^q : q \in \mathbb{Q} : 0 < q \leq s\}.$$

Auch das ist wohldefiniert i.e. stimmt für rationale s mit der schon gegebenen Definition überein. Schliesslich definiert man für $a > 0$ und $x > 0$ noch

$$x^{-a} := \frac{1}{x^a}.$$

Dann kann man folgende Rechenregeln zeigen:

$$x^b x^c = x^{b+c}$$

$$(x^b)^c = x^{bc}$$

$$x^c y^c = (xy)^c.$$

für $x, y > 0$ und b, c reell. Wir werden diese Definitionen und Rechenregeln später als Nebenprodukt erhalten. Darum geben wir hier keine weiteren Details.

Bemerkung. Der Ausdruck 0^0 stellt ein Problem dar:
$a^0 = 1$ für alle $a > 0$. Das suggeriert $0^0 = 1$.
$0^s = 0$ für alle $s > 0$. Das suggeriert $0^0 = 0$.
Daher muss man diesen Fall getrennt und kontextabhängig behandeln.

KAPITEL 3

Archimedisches Axiom und Intervallschachtelungsprinzip

Die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist von entscheidender Bedeutung für alle weiteren Untersuchungen. Sie kann in zwei Aspekte 'zerlegt' werden, nämlich Gültigkeit des Archimedischen Axiom und Konvergenz gewisser Folgen. Eine Möglichkeit, Konvergenz von Folgen zu fassen, liefert das Intervallschachtelungsprinzip. Das behandeln wir in diesem Abschnitt. Ausführliche weitere Untersuchungen zu Konvergenz von Folgen finden sich im kommenden Kapitel.

1. Das Archimedische Axiom

In diesem Abschnitt lernen wir noch eine weitere Eigenschaft der reellen Zahlen kennen, die in unserem Zugang eine Folgerung ist. Das Archimedische Axiom liefert insbesondere Existenz von Nullfolgen und Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

LEMMA. *(Charakterisierung Archimedisches Axiom) Sei K ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für alle $x > 0$ existiert ein $m \in N$ mit $x < m1$.* ***Zeichnung***
(ii) *Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m1} < \epsilon$.* ***Zeichnung***
(iii) *Für alle $x, y > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $y < mx$ oder, äquivalent, $y/(m1) < x$.*

Beweis. (iii)$\Longrightarrow$ (ii): Das folgt sofort mit $x = \epsilon$ und $y = 1$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): (Nach (ii) angewendet auf $\epsilon = 1/x$) existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1/m1 < 1/x$. Damit folgt dann durch Bilden des Kehrwertes $x < m1$.

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Wähle nach (i) ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1/x < m1$ also $1/(m1) < x$. Wähle weiter nach (i) ein $l \in \mathbb{N}$ mit $y/(l1) < 1$. Dann gilt für $k = lm \in \mathbb{N}$ also

$$\frac{y}{(lm)1} = \frac{1}{m1}\frac{y}{l1} < \frac{1}{m1}1 < x.$$

$\square$

DEFINITION. *(Archimedisches Axiom) Ein angeordneter Körper K erfüllt das Archimedische Axiom, wenn eine der äquivalenten Eigenschaften des vorigen Lemma gilt.*

FOLGERUNG. *(Dichtheit von $\mathbb{Q}$) Sei K ein angeordneter Körper, der das Archimedische Axiom erfüllt. Dann gibt es zu $x, y \geq 0$ mit $x < y$ Elemente $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x < n1/m1 < y$. Insbesondere existiert zu jedem $x \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ Elemente $n, m \in \mathbb{N}$ mit $|x - n1/m1| < \epsilon$. Für $x \leq 0$ gilt entsprechendes, wenn man m/n durch $-m/n$ ersetzt.*

Beweis. Sei $\delta := y - x > 0$. Dann existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 < m\delta = my - mx$.

Beh. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $mx < n1 < my$.
Bew. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann ist die Menge $L := \{k \in \mathbb{N}_0 : k1 \leq mx\}$ induktiv. (Denn $0 \in L$: klar. $k \in L \Longrightarrow k{+}1 \in L$: Sonst $k1 \leq mx$ und $(k{+}1)1 > mx$, also $k1 \leq mx < (k{+}1)1 < my$ Widerspruch). Daher gilt $L = \mathbb{N}_0$. Das ist ein Widerspruch zum Archimedischen Axiom.

Sind n, m wie in der Behauptung, so folgt nach Division durch $m1$ also $x < n1/m1 < y$. □

Ende der 8. Vorlesung

Bemerkung. In einem angeordenteren Körper, der das Archimedische Axiom erfüllt gilt dann also für jedes $s \in K$ mit $s > 0$

$$s = \sup\{\frac{n1}{m1} : n, m \in \mathbb{N}, \frac{n1}{m1} < s\} = \inf\{\frac{n1}{m1} : n, m \in \mathbb{N}, \frac{n1}{m1} > s\}$$

und entsprechend für negative s.

FOLGERUNG. *Sei K ein angeordneter Körper, der das Archimedische Axiom erfüllt.*
(a) Sei $a > 1$. Dann existiert zu jedem $C \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > C$.
(b) Sei $0 < a < 1$. Dann exisiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < a^n < \epsilon$.

Beweis. (a) Das folgt aus der Bernoulli Ungleichung: $a = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$. Also

$$a^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > C.$$

Hier wird im letzten Schritt das Archimedische Axiom verwendet.
(b) Das folgt aus (a) durch Bilden des Kehrwertes. □

THEOREM. *(Archimedisches Axiom) In $\mathbb{R}$ gilt das archimedische Axiom.*

Beweis. Zu zeigen: Sind $x, y > 0$ so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ny > x$. Wir nehmen an, daß die Aussage nicht gilt. Dann ist die Menge

$$M := \{ny : n \in \mathbb{N}\}$$

also nach oben beschränkt (durch x) und besitzt aufgrund der Ordnungsvollständigkeit ein Supremum S.
$\Longrightarrow (n + 1)x \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$,.
$\Longrightarrow nx \leq S - x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow S - x$ ist obere Schranke von M. Widerspruch.

$\square$

Bemerkung. Auch in $\mathbb{Q}$ gilt das Archimedische Axiom (Warum? $n/m \leq n$). Nicht in jedem angeordneten Körper gilt das Archimedische Axiom ($- - - >$ Nichtstandard Analysis).

2. Intervallschachtelungsprinzip

In diesem Abschnitt lernen wir eine weitere Konseqünz der Ordnungsvollständigkeit kennen.

Zunächst einige Bezeichnungen. Sei K ein angeordneter Körper. Dann definiert man für $a \leq b$ die Intervalle:

$[a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall.
$(a, b) := \{x \in K : a < x < b)$ offenes Intervall (kann leer sein)
$(a, b] := \{x \in K : a < x \leq b\}$ nach links halboffenes Intervall.
$[a, b) := \{x \in K : a \leq x < x\}$ nach rechts halboffenes Intervall.

Es heissen dann a, b die Randpunkte des Intervalles und $|I| := b - a$ die Länge des Intervalles.

Idee zur Intervallschachtelung: Eine geschachtelte Folge von Intervallen, die sich zusammenziehen. **Zeichnung**.

Definition. *Sei K ein angeordneter Körper. Eine Familie I_n, $n \in \mathbb{N}$, von abgeschlossenen Intervallen in K heißt Intervallschachtelung, wenn gilt*

- *$I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ('Geschachtelt')*
- *$|I_n| \to 0$, $n \to \infty$ (d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_\epsilon$). ('Zusammenziehen')*

Definition. *(Intervallschachtelungsprinzip) Sei K ein angeordneter Körper. Dann erfüllt K das Intervallschachtelungsprinzip, wenn es zu jeder Intervallschachtelung I_n, $n \in \mathbb{N}$, einen Punkt $x \in K$ gibt mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Zeichnung.
Bemerkung. Ist I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung, so kann es höchstens einen Punkt geben, der zu allen I_n gehört. Ein solcher Punkt ist also eindeutig.
(Bew. Seien x und y zwei solcher Punkte, so gilt $|x - y| \leq |I_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (da $x, y \in I_n$). Wegen $|I_n| \to 0$ gilt dann $|x - y| \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Damit folgt $|x - y| = 0$.)

Theorem. *In $\mathbb{R}$ gilt das Intervallschachtelungsprinzip.*

Beweis. Es bilden die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung. Zu zeigen: Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt (Induktion) $I_m \subset I_n$ für alle $m \geq n$. Damit folgt

$$a_m \leq b_n \quad (*)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. (Fallunterscheidung $n \leq m : a_m \leq b_m \leq b_n$ und $m < n$: $a_m \leq a_n \leq b_n$. Zeichnung). Damit ist also die Menge

$$M := \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt (zum Beispiel durch b_1). Aufgrund der Ordnungsvollständigkeit existiert dann also

$$x := \sup M.$$

Da x eine obere Schranke von M ist gilt

$$a_m \leq x \quad (**)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist aufgrund von $(*)$ aber jedes b_n, $n \in \mathbb{N}$, eine obere Schranke von M und es gilt dann (aufgrund der Supremunseigenschaft) also

$$x \leq b_n \quad (***)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit $(**)$ und $(***)$ folgt $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bemerkung. Der obige Schluss nutzt nicht, daß sich die Intervalle zusammenziehen. Er funktioniert für jede Folge von ineinenander enthaltenene Intervallen. Genaür gilt (Übung): Ist I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ in $\mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$S := \cap I_n = [\sup a_n, \inf b_n].$$

Insbesondere ist S also nichtleer und ein Intervall. Wenn sich diese Intervalle zusammenziehen, so besteht S nur aus einem Punkt. Ein entsprechende Aussage gilt im allgemeinen nicht, wenn die Intervalle nicht abgeschlossen sind.

3. Eine äquivalenz

THEOREM. *Sei K ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist K ordnungsvollständig (d.h. $K = \mathbb{R}$).*
(ii) *Für K gilt das Intervallschachtelungsprinzip und das Archimedische Axiom.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Die entsprechende Aussagen wurden in den beiden vorigen Abschnitten gezeigt.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sei M eine nach oben beschränkte Menge in K. Zu zeigen: M hat ein Supremum.

Sei C eine obere Schranke von M. Sei $u \in K$ keine obere Schranke von M z.b. $u = y - 1$ für ein $y \in M$. Wir konstruieren induktiv Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit

- Alle b_n sind obere Schranken von M.
- Alle a_n sind keine oberen Schraken von M.

- $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$.

Dann bilden die I_n, $n \in N$, eine Intervallschachtelung (die letzte Eigenschaft liefert nach dem Archimedischen Axiom, daß $|I_n| = \frac{1}{2^n} \to 0$). Für den gemeinsamen Punkt x aller I_n (der nach Voraussetzung existiert) gilt dann

- x ist obere Schranke (sonst $z \in M$ mit $x < z$ Widerspruch zu b_n beliebig nahe an x für grosse n und b_n obere Schranke. Zeichnung)
- Es gibt keine kleinere obere Schranke als x (sonst $M \leq z < x$ Widerspruch zu a_n beliebig nahe an x für grosse n und a_n keine obere Schranke. Zeichnung)

Nun zur Konstruktion: Wir setzen $I_1 := [u, C]$. Seien $I_1, \ldots, I_n$ wie oben schon konstruiert und $I_n = [a_n, b_n]$. Sei

$$m := (a_n + b_n)/2$$

der Mittelpunkt von I_n. Wir unterscheiden zwei Fälle (Zeichnung):

Fall 1: m ist obere Schranke von M. Wir setzen $I_{n+1} := [a_n, m]$. Zeichnung.

Fall 2: m ist keine obere Schranke von M. Wir setzen $I_{n+1} := [m, b_n]$. Dann hat I_{n+1} die gewünschten Eigenschaften.
Zeichnung 'konvergierende Intervalle'. $\square$

KAPITEL 4

Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$

In diesem Kapitel lernen wir das zentrale Konzept der Analysis kennen, nämlich das Konzept des Grenzwertes. Es ist grundlegend für alle weiteren Untersuchungen und (in gewisser Weise) das schwierigste Konzept der Analysis.

1. Definitionen und Rechenregeln

DEFINITION. *(Folge) Sei X eine Menge. Eine Abbildung $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ heißt Folge (in X).*

Notation. (x_n) oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_n)_n$.

Beispiele.

- Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto c$, also $x_n = c$ für alle n. . Dann heißt (x_n) die konstante Folge mit Wert c.
- $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto (-1)^n$, also $x_n = (-1)^n$.
- $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$, also $x_n = \frac{1}{n}$.

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Analysis, dem Begriff der **Konvergenz**.

Idee. Die Folge (x_n) konvergiert gegen den Wert x, wenn für alle genügend grossen n die Zahl x_n der Zahl x beliebig nahe ist.

Es wird nun darum gehen, diese Idee präzise zu fassen. Das verlangt Arbeit, da es um das Verhalten der Folge im Unendlichen geht.

DEFINITION. *(Konvergenz) Die Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen x, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$. Dann heißt x Grenzwert der Folge (x_n). Eine Folge, die nicht gegen ein x konvergiert heißt divergent.*

Ende der 9. Vorlesung

Zeichnung ε- Falle

Zeichnung. ε- Schlauch

Wichtig. Eine Folge (x_n) kann nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren (d.h. der Grenwert ist eindeutig, wenn er existiert).

Bew: Es konvergiere (x_n) gegen x und gegen y. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also n_x mit $|x - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_x$, und es gibt n_y mit $|y - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_y$. Mit $n \geq n_x, n_y$ gilt dann also

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $|x - y| = 0$, also $x = y$.

Aufgrund der Eindeutigkeit kann man von **dem Grenzwert** einer Folge sprechen (falls existent). Man verwendet folgende
Notation. Konvergiert (x_n) gegen x, so schreibt man auch

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ oder } x_n \longrightarrow x, n \longrightarrow \infty$$

und nennt x den Grenzwert der Folge (x_n).

DEFINITION. *Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to 0$ heisst Nullfolge.*

Bemerkung. Diese und ähnliche Definitionen lassen sich mit sogenannten Quantoren ausdrücken. Wir werden in dieser Vorlesung kaum Quantoren benutzen (aber die zugrundeliegenden Konzepte natürlich ständig verwenden). In Quantoren lautet die Definition von Konvergenz einer Folge:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_\varepsilon \, |x - x_n| < \varepsilon.$$

Hier: '$\forall \diamond$' steht für 'Für alle $\diamond$ gilt:'

'$\exists\clubsuit$' steht für 'Es existiert $\clubsuit$ mit der Eigenschaft, daß / sodaß...'. Damit ergibt sich auch, daß Quantoren immer an den Anfang der Aussage gestellt werden müssen.

Bemerkung. (Konvergenz entscheidet sich ganz weit draussen): $x_n \to x$. Sei $N > 0$ und (y_n) Folge mit $x_n = y_n$ für $n \geq N$. Dann gilt $y_n \to x$.
Bew. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon, N$ gilt also

$$|y_n - x| = |x_n - x| < \varepsilon.$$

Drei Beispiele.

- Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die konstante Folge $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_n = c$, konvergent gegen c.
  Bew...
- Sei $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_n = \frac{1}{n}$. Dann konvergiert x_n geben 0.
  Bew. Das folgt aus dem Archimedischen Axiom.
  In gewisser Weise ist dies die einzige explizite konvergente Folge, die wir kennen.

- Sei $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n$ d.h. $x_n = -1$ für ungerade n und $x_n = 1$ für gerade n. Dann ist (x_n) nicht konvergent.
  Bew. Wir beweisen ein allgemeines Kriterium.

  Beh. Ist (x_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, so ist die Folge $y_n := x_{n+1} - x_n$ eine Nullfolge (d.h. konvergent gegen 0).
  Bew. ...

  Mit diesem allgemeinen Kriterium sieht man sofort, daßs $x_n = (-1)^n$ nicht konvergiert, da y_n immer den Betrag 2 hat.

Wir geben jetzt noch eine leichte Umformulierung der Definition von Konvergenz. Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ sei die ε-Umgebung (oder ε Kugel um x) $U_\varepsilon(x)$ von x definiert durch

$$U_\varepsilon(x) := \{z\ in \mathbb{R} : |z - x| < \varepsilon\}.$$

Es gilt also

$$U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Eine solche Umgebung ist dann nichts anderes als ein offenes Intervall um x. In diesem Sinne hätten wir das Konzept der Umgebung also nicht neu einführen müssen. Für spätere Verallgemeinerungen erweist sich aber das Denken mit Umgebungen als sehr nütztlich.

Bemerkung. Allegemein nennt man eine Menge U Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subset U$.

Proposition. *(Charakterisierung Konvergenz) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *(x_n) konvergiert gegen x*
(ii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $x_n \in U_\varepsilon(x)$.*
(iii) *Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_\varepsilon(x)\}$ endlich (d.h. für jedes feste $\varepsilon > 0$ liegen bis auf endlich viele Ausnahmen alle x_N in der ε-Umgebung von x).*

Beweis. Die äquivalenz von (i) und (ii) ist klar. (Denn: $z \in U_\varepsilon(x) \Longleftrightarrow |z - x| < \varepsilon$.)
$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$: Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist genau dann endlich, wenn ab einem gewissen n_0 keine natürliche Zahl mehr dazu gehört. $\square$

Bevor wir uns der Existenz konvergenter Folgen widmen, sammeln wir hier schon einmal ein paar nützliche Eigenschaften.

Folgerung. *(x_n) konvergent $\Longrightarrow$ (x_n) beschränkt (d.h. die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt d.h. es existiert $C > 0$ mit $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$).*

Beweis. Sei $x := \lim x_n$. Für $n \geq n_1$ gilt $|x - x_n| < 1$, also

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq 1 + |x|.$$

Damit folgt

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x|\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung. Beschränktheit einer Folge hängt nicht von den ersten endlich vielen Gliedern ab.

Die folgenden Eigenschaften zeigen insbesondere, daß Konvergenz mit den Operationen $+$, $\cdot$, $:$ und $|\cdot|$ verträglich ist.

PROPOSITION. *(Rechenregeln) Seien (x_n) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt.*
(a) $x_n \to x$, $y_n \to y \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y$.
(b) $x_n \to x$, $y_n \to y \Longrightarrow x_n y_n \to xy$. Insbesondere $\alpha x_n \to \alpha x$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
(c) $x_n \to x$, und $y_n \to y$ mit $y \neq 0 \Longrightarrow y_n \neq 0$ für $n \geq n_0$ und $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$.

Bemerkung. Später: Die Abbildungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \to x+y$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \to xy$ und $:: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x/y$ sind stetig.
Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $x_n \to x$ gibt es ein n_x mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_x$. Wegen $y_n \to y$ gibt es ein n_y mit $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_y$. Für $n \geq n_\varepsilon := \max\{n_x, n_y\}$ gilt dann also nach Dreiecksungleichung

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ende der 10. Vorlesung

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wähle $C > 0$ mit $|x_n| \leq C$ für alle n. Wegen $x_n \to x$ existiert $n_x \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|+1}$.Wegen $y_n \to y$ existiert $n_y \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Damit gilt für $n \geq \max\{n_x, n_y\}$ also

$$|x_n y_n - x_y| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| \ldots$$

(c) Wegen $y_n \to y$ existiert ein n_0 mit $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ für $n \geq n_0$. Damit gilt also für $n \geq n_0$

$$|y_n| \geq |y| - |y_n - y| > |y|/2 > 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $x_n \to x$ existiert ein n_x mit

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon |y|}{4}$$

für alle $n \geq n_1$. Wegen $y_n \to y$ existiert ein n_y mit

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon |y|^2}{2|x| + 1}.$$

Für $n \geq \max\{n_x, n_y, n_1\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{yx_n - xy_n}{yy_n}\right| \\
&\leq \frac{2}{|y|^2}|yx_n - xy_n| \\
&\leq \frac{2}{|y|^2}(|y||x_n - x| + |x||y_n - y|) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

PROPOSITION. *(Stetigkeit des Betrages)*
Seien (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt: $x_n \to x \Longrightarrow |x_n| \to |x|$.

Beweis. Das folgt sofort aus der zweiten Dreiecksungleichung

$$||x_n| - |x|| \leq |x - x_n|.$$

□

PROPOSITION. *(Verträglichkeit von Konvergenz mit $\leq$) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \leq c$ / $x_n \geq c$ und $x_n \to x$. Dann gilt $x \leq c$ / $x \geq c$.*

Beweis. Wir betrachten $x_n \leq c$. Angenommen $x > c$. Dann ist $\varepsilon := x - c > 0$. Wegen $x_n \to x$ müsste gelten $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für grosse n, also $x_n > c$. Widerspruch. □

Bemerkung. $x_n < c\, x_n \to x$ impliziert nicht $x < c$. Beispiel $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Dann $x_n < 1$, aber $x = \lim x_n = 1$

PROPOSITION. *Seien (x_n) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Dann gilt $\max\{x_n, y_n\} \to \max\{x, y\}$ und $\min\{x_n, y_n\} \to \min\{x, y\}$.*

Beweis. Es gilt

$$\min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}, \ \max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

Nun folgt die Behauptung aus den schon gezeigten Aussagen. □

THEOREM. *(Sandwichtheorem) Seien $L \in \mathbb{R}$ und konvergente Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = L = \lim_{n\to\infty} y_n$ gegeben. Ist (z_n) eine weitere Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle n ab einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$, so konvergiert (z_n) ebenfalls gegen L.*

Beweis. **Zeichnung.**
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wegen $L = \lim x_n$ gibt es ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq L - \varepsilon$ für alle $n \geq n_x$.
Wegen $L = \lim y_n$ gibt es ein $n_y \in \mathbb{N}$ mit $y_n \leq L + \varepsilon$ für alle $n \geq n_y$.

Für $n \geq n_x, n_y, n_0$ gilt dann also

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq L + \varepsilon$$

und damit

$$|z_n - L| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Es ist sinnvoll in gewissen Fällen auch $\pm\infty$ als Wert zuzulassen:
Eine Folge in $\mathbb{R}$, die nicht konvergiert, heißt divergent.
Unter den divergenten Folgen in $\mathbb{R}$ gibt es zwei Klassen von Folgen mit besonders guten Eigenschaften:

- Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞, $x_n \to \infty$, wenn für jedes $C \in \mathbb{R}$ ein $n_C \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \geq C$ für alle $n \geq n_C$.
- Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen $-\infty$, $x_n \to -\infty$, wenn für jedes $C \in \mathbb{R}$ ein $n_C \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \leq C$ für alle $n \geq n_C$.

Bei vorsichtigem Umgang mit ∞ bleiben einige Rechenregeln für konvergente Folgen auch für bestimmt divergente Folgen noch gültig. Eine **wichtige Ausnahme** stellt der Umgang mit Termen der Form $0 \cdot \infty$ dar (siehe Übung).
ähnlich kann man für Supremum und Infimum von unbeschränkten Mengen verfahren:

- Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist M nicht nach oben / unten beschränkt, so setzten wir $\sup M = \infty$ / $\inf M = -\infty$.

Beachte. (a) $\sup M = \infty \iff$ existiert Folge (x_n) in M mit $x_n \to \infty$. Entsprechend für Infimum.

(b) $x_n \to \infty \iff 1/x_n \to 0$ und $x_n \geq 0$ für n gross

Beispiel. $\sqrt[n]{n}! \to \infty$, $n \to \infty$.
Bew. $n! = 1(n-1)\cdots 1 \geq n/2 \cdot n/2 = (n/2)^{n/2}$. ($n/2$-Faktoren). Damit $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{(n/2)^{n/2}} = (n/2)^{1/2} \to \infty$.

Mit den bisherigen Betrachtungen können wir Konvergenz einiger Folgen untersuchen.
Beispiele. (a) Für jedes $a \neq 0$ konvergiert (a/n) gegen 0. (Nullfolge).
Bew. Archimedes oder Rechenregeln $a/n = a \cdot \frac{1}{n}$.

(b) (Exponentielles Fallen) Sei $0 < q < 1$. Dann konvergiert $x_n = q^n$ gegen 0.
Bew. Das ist eine Folgerung aus dem Archimedischen Axiom und wurde oben schon behandelt. ($0 < q < 1$ impliziert $1/q = 1 + a$ mit $a > 0$. Bernoulli impliziert dann $(1/q)^n \geq 1 + na$. und damit $0 < q^n \leq \frac{1}{na+1} \leq \frac{1}{an} = \frac{1}{a}\frac{1}{n}$. Nun Sandwichtheorem und Beispiel (a).)

(c) Verallgemeinerung von (b): (Exponentielles Fallen schlägt polynomielles Wachsen): Sei $0 < q < 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Sei $x_n = q^n n^k$. Dann gilt $x_n \to 0$, $n \to \infty$.

Beachte. $q^n \to 0$, aber $n^k \to \infty$ für $a > 1$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew. Plan: Schreibe q^n also $p^{2kn} = p^{kn}p^{kn}$ mit geeignetem p. Dann gilt also

$$q^n n^k = p^{kn}p^{kn}n^k = p^{kn}(p^{kn}n^k).$$

Erster Term gegen Null; zweiter Term beschränkt.
Hier sind die Details: $p := \sqrt[2k]{q} < 1$.
Also $1/p = 1 + a$ mit $a > 0$. Bernoulli impliziert $(1/p)^n \geq 1 + na$ und damit $0 < p^n < \frac{1}{na}$. Mit $0 \leq q^n = p^{2kn}$ folgt also

$$0 \leq q^n n^k \leq p^{kn}p^{kn}n^k \leq p^{kn}(\frac{1}{na})^k n^k = p^{kn}(\frac{1}{a})^k.$$

Damit folgt Aussage aus (b) und dem Sandwichtheorem.

(d) Sei $a > 0$ und $x_n = \sqrt[n]{a}$. Dann gilt $x_n \to 1$, $n \to \infty$.

Bew. Wir unterschieden drei Fällen:

$a = 1$. Das ist einfach.

$a > 1$: Wegen $a > 1$ und $a = x_n^n$ gilt $x_n > 1$. Weiterhin $a = x_n^n = (1 + (x_n - 1))^n \geq 1 + n(x_n - 1)$
$\Longrightarrow (a - 1)/n \geq x_n - 1 \geq 0$,
$\Longrightarrow (a - 1)/n + 1 \geq x_n \geq 1$.
Damit folgt nach (a) und dem Sandwichtheorem $x_n \to 1$.

$0 < a < 1$: Das folgt nach Bilden des Kehrwertes aus dem schon bewiesenen.

(e) Verallgemeinerung von (d)): Sei $x_n = \sqrt[n]{n}$. Dann gilt $x_n \to 1$, $n \to \infty$.

Beachte. Wettstreit zwischen $\sqrt[n]{a} \to 1$ und $n \to \infty$ für $n \to \infty$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew. Es gilt $x_n^n = n$, also insbesondere $x_n > 1$. Mit binomischem Satz folgt

$$n = (1+(x_n-1))^n = \sum_{k=0}^{n}(n\ k)1^{n-k}(x_n-1)^k \geq (n2)(x_n-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2}(x_n-1)^2,$$

also

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq x_n - 1 \geq 0,$$

also

$$1 \leq x_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Mit $\frac{2}{n-1} \to 0, n \to \infty$, folgt auch $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0, n \to \infty$ (Denn: $0 \leq a < \varepsilon^2$ $\Longrightarrow 0 \leq \sqrt{a} < \varepsilon$.) Daher folgt Behauptung aus dem Sandwichtheorem.

2. Aspekte der Vollständigkeit

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ liefert die Konvergenz ganzer Klassen von Folgen. Tatsächlich ist diese Konvergenz zusammen mit dem Archimedischen Axiom ein Charakteristikum der reellen Zahlen. Das wird in diesem Abschnitt studiert.

Ende der 11. Vorlesung

Definition. *Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt monoton wachsend / fallend wenn $x_{n+1} \geq x_n$ / $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*
Eine Folge (x_n) heißt nach oben / unten beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben / unten beschränkt ist.

Zeichungen einer nach oben beschränkten monotonen Folge: auf der Achse, oder als Graph...

Theorem. *(Konvergenz monotoner beschränkter Folgen) Jede monoton wachsende / fallende nach oben /unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. **Zeichnung.** Sei (x_n) eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann existiert also aufgrund der Ordngungsvollständigkeit $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Definition des Supremum ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$S_\varepsilon - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon}.$$

Damit folgt also für alle $n \geq n_\varepsilon$ aufgrund der Monotonie

$$S - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq S$$

also $|S - x_n| < \varepsilon$.

Der Fall monoton fallender nach unten beschränkter Folgen kann analog behandelt werden. □

Bemerkung.

- Neben der Konvergenz von $(\frac{1}{n})$ gegen 0 haben wir also in unseren Zugang zu $\mathbb{R}$ eine Methode zur Erzeugung konvergenter Folgen eingebaut.
- Ist die Folge (x_n) wachsend/ fallend so gilt $x_n \to C$, wobei $C \in \mathbb{R}$ oder $C = \infty$ / $C = -\infty$.

Beispiel - die Eulersche Zahl e: $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert.

Beachte. $1 + \frac{1}{n} \to 0$, aber $a^n \to \infty$ für $a > 1$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew: Wir zeigen, daß (x_n) wachsend und beschränkt ist. Die Bernoulli Ungleichung liefert

$$(1+\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n}^2)^n \geq (1-\frac{1}{n})$$

also

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n \geq \frac{(1-\frac{1}{n})}{(1-\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{n-1}} = (\frac{n}{n-1})^{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1} = x_{n-1}$$

für alle $n \geq 2$. Die Folge (x_n) ist also wachsend. Die Folge (x_n) ist beschränkt durch 3:

$$\begin{aligned}
x_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
(Binomi) &= \sum_{k=0}^{n} (n\,k) \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2 \cdots k} \frac{1}{n^k} \\
(Umsortieren) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n\ldots n} \frac{1}{k!} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\
(Induktion: \; k! \geq 2^{k-1}) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
(Geom.Summe) &\leq 1 + \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \leq 3.
\end{aligned}$$

Damit existiert nach dem vorangehenden Satz der Grenzwert der Folge (x_n). Dieser Grenzwert wird e genannt. Später:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Bemerkung. Die Zahl e spielt bei kontinuierlichen Wachstumsvorgängen eine Rolle, z.B. stetige Verzinsung: Kapital A Zinsatz 100 prozent. Dann hat man nach einem Jahr bei

- 0 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen : $A(1+1)$
- 1 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen: $A(1+1/2)(1+1/2)$
- 2 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen: $A(1+1/3)(1+1/3)(1+1/3)$
- etc.

Beispiel - die Zahl $e(a)$: Sei $a > 0$. Sei $x_n := (1 + a/n)^n$. Dann konvergiert (x_n). Wir nennen den Grenzwert $e(a)$. (Später: $e(a) = e^a$.).

Bew. Wir zeigen Monotonie und Beschränktheit.

Monotonie:

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{n} (n\ k) a^k \\
\text{(siehe voriges Bsp.)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots n} \frac{a^k}{k!} \\
(l/r \leq (l+1)/(r+1) &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{(n+1)\cdot(n+1)\cdots(n+1)} \frac{a^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{(n+1)\cdot(n+1)\cdots(n+1)} \frac{a^k}{k!} \\
&= x_{n+1}.
\end{aligned}$$

(Alternativer direkter Beweis der Monotonie: Sei $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= (1 + \frac{a}{n+1}) \left(\frac{1 + a/n+1}{1 + a/n} \right)^n \\
&= (1 + \frac{a}{n+1}) \left(\frac{(n+1+a)n}{(n+a)(n+1)} \right)^n \\
&= (1 + \frac{a}{n+1}) \left(\frac{(n+1)n + na}{(n+1)(n+a)} \right)^n \\
&\geq (1 + \frac{a}{n+1})(1 - \frac{a}{(n+1)(n+a)})^n \\
(\mathit{Bernoulli}) &\geq (1 + a/n+1)(1 - \frac{na}{(n+1)(n+a)}) \\
&= \frac{n+1+a}{n+1})(\frac{(n+1)(n+a) - an}{(n+1)(n+a)}) \\
\mathit{Sortierenn.Potenzen} &= \frac{n^3 + n^2(a+2)n(1+2a) + a(1+a)}{n^3 + n^2(a+2) + n(1+2a) + a} \\
a > 0 &\geq 1
\end{aligned}$$

)
Beschränkteit:
Die Betrachtungen des vorigen Beispiel führen auf

$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}.$$

Wahle nun $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2a$. Dann gilt

$$x_n = \sum_{k=0}^{N} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a^k}{k!} = C + \frac{a^{N+1}}{N!} \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a^{k-N-1}}{(N+1)\cdots k} \leq C + \frac{a^{N+1}}{N!} 3.$$

(Grundidee $a^k/k!$ ist schliesslich a/l mit l gross....)

Beispiel - die Zahl $e(-a)$**:** Für $b = -a <$ gilt $\lim(1 - \frac{a}{n})^n = \frac{1}{e(a)}$.
Bew. Übung. Idee $(1 + \frac{a}{n})(1 - \frac{a}{n}) = (1 + a^2/n^2)^n$ konvergiert gegen 1...

Beispiel - k-te Wurzel. (Übung) Sei $a > 0$ beliebig. Definiere induktiv die Folge (x_n) durch $p := c > 0$ beliebig und

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) = x_n + \frac{x_n}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right).$$

Dann konvergiert die Folge (x_n) gegen $\sqrt[k]{a}$.
Beweisskizze: Offenbar (?Induktion!) gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bernoulli Ungleichung liefert (Wie?):

$$x_{n+1}^k \geq a$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ausserdem gilt nach Definition

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n}{k}\left(1 - \frac{a}{x_n^k}\right).$$

Damit ist also (Warum ?) $(x_n)_{n \geq 2}$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt. Also konvergiert die Folge (x_n) nach dem Satz gegen einen Grenzwert b. Dieser Grenzwert erfüllt (Wieso?)

$$b = \frac{1}{k}\left((k-1)b + \frac{a}{b^{k-1}}\right)$$

und damit auch $b^k = a$.

Bemerkung. Diese Betrachtungen sind ein Fall des sogenannten Newton Verfahren. Damit kann man (oft) eine Nullstelle einer Funktion f (hier $x^k - a$) auf folgende Art berechnen:

$n = 0$: Wähle einen (geeigneten) Wert p.

$n \Longrightarrow n + 1$: Ist x_n schon bestimmt, so berechnet man x_{n+1} wie folgt: Bilde die Tangente an $(x, f(x))$ und berechne ihren Schnitt mit der x-Achse. Dieser Schnittpunkt ist dann x_{n+1}. (Zeichnung). Rechnung liefert die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ende der 12. Vorlesung

Der Satz zur Konvergenz monotoner Folgen mag erst einmal speziell erscheinen, da keineswegs jede Folge monoton ist. Aber er hat weitreichende Konseqünzen. Um das näher zu erläutern, brauchen wir noch einen neün Begriff:

Definition. *Sei $(x_n)_n$ eine Folge und (n_k) eine strikt wachsende Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Dann heißt (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n).*

Bemerkungen.

- Ist $n. : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, k \mapsto n_k$ und $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist (x_{n_k}) gerade die Abbildung $x \circ n.$.
- Für den Begriff der Teilfolge ist nicht wichtig, daß die Werte der Folge in $\mathbb{R}$ liegen.

Zeichnung. $x_1, x_2 \ldots$ vs $x_{n_1}, x_{n_2} \ldots$

Beispiel. $x_n = (-1)^n$. Dann ist (x_{2n}) die konstante Folge 1 und (x_{2n+1}) die konstante Folge -1. Diese Teilfolgen sind konvergent also 'schöner' als die Ursprungsfolge. Das ist ein allgemeines Phänomen (s.u.).

Das folgende Lemma zeigt, daß der Unterschied zwischen beliebigen Folgen und monotonen Folgen doch nicht so groß ist.

Lemma. *Jede Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Ein $N \in \mathbb{N}$ heißt Gipfelpunkt von (x_n), wenn gilt $x_N \geq x_n$ für alle $n \geq N$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Es gibt unendlich viele Gipfelpunkte. Sei $n_k := k$-ter Gipfelpunkt. Dann ist $n_1 < n_2 < \ldots n_k <$ die Folge von Gipfelpunkten. Daher gilt also

$$x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und (x_{n_k}) ist eine monoton fallende Teilfolge.

Fall 2: Es gibt nur endlich viele Gipfelpunkte. Wir konstruieren induktiv streng monoton wachsende (n_k), so daß x_{n_k} monoton wachsend ist.

$k = 1$: Wähle n_1 grösser als jeden Gipfelpunkt (möglich, da nur endlich viele Gipfelpunkte).

$k \Longrightarrow k+1$: Seien $n_1 < n_2 \ldots < n_k$ schon konstruiert. Da n_k kein Gipfelpunkt ist ($n_k > n_1 > jeder\, Gipfelpunkt$), gibt es ein $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$. □

Theorem. *(Bolzsano - Weierstrass) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Nach dem vorigen Lemma enthält die Folge eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt (da die Ursprungsfolge beschränkt ist). Damit konvergiert die Teilfolge nach dem Satz über Konvergenz monotoner beschränkter Folgen. □

Wir werden nun Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ charakterisieren. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition. *(Cauchy Folge) Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

In Quantorisch:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n, m \geq n_\varepsilon\, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Idee. Folgeglieder sind beliebig nahe aneinander für genügend grosse n und m.

Lemma. *Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. (Eigentlich klar: Wenn Folgeglieder nahe am Grenzwert sind, sind sie auch nahe aneinander. **Zeichnung**.)
Details: Sei $x_n \to x$, $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_\varepsilon$. Also

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

für $n, m \geq \varepsilon$. □

Lemma. *Eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit einer konvergenten Teilfolge ist konvergent (gegen den Grenzwert der Teilfolge).*

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge und sei (x_{n_k}) eine gegen x konvergente Teilfolge. Wir zeigen $\lim x_n = x$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Es existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n \geq n_\varepsilon$ (da Cauchy Folge).

Es existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq k_0$ (da Teilfolge konvergent).

Sei nun $k \geq k_0$ mit $n_k \geq n_\varepsilon$ gewählt.
Es gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir kommen nun zur angekündigten Charakterisierung von Konvergenz.

Theorem. *(Cauchy-Kriterium) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *(x_n) ist konvergent.*
(ii) *(x_n) ist eine Cauchy Folge.*

Beweis. Die Implikation $(i) \Longrightarrow (ii)$ haben wir in einem vorausgehenden Lemma gezeigt.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Sei (x_n) eine Cauchy Folge. Dann ist (x_n) beschränkt (Wähle n_1 mit $|x_n - x_m| < 1$ für $n \geq n_1$. Dann gilt für $n \geq n_1$ also $|x_n| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|$....) Damit hat (x_n) also nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge. Damit ist (x_n) nach dem vorigen Lemma konvergent.

□

Bemerkung. Es handelt sich um eine wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen (siehe folgendes Theorem). Die entscheidende Implikation ist $(ii) \Longrightarrow (i)$.

In gewisser Weise charakterisieren (fast) alle in diesem Abschnitt gegebenen Sätze die reellen Zahlen. Genaür gilt folgendes.

THEOREM. *(Die grosse Charakterisierung) Sei K ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist K ordnugsvollständig (d.h. $K = \mathbb{R}$).*
(ii) *Es erfüllt K das Intervallschachtelungsprinzip und das Archimedische Axiom.*
(iii) *Jede monotone beschränkte Folge konvergiert, und es gilt das Archimedische Axiom.*
(iv) *Jede beschränkte Folge hat eine konvertente Teilfolge, und es gilt das Archimedische Axiom.*
(v) *Jede Cauchy-Folge konvergiert, und es gilt das Archimedische Axiom.*

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$ (ii): Das wurde schon in Kapitel 3 durchgeführt.

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Siehe oben. (Definiere $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$....)

(iii)$\Longrightarrow$ (iv): Jede beschränkte Folge hat eine monotone Teilfolge (nach dem oben gegebenen Beweis).

(iv)$\Longrightarrow$ (v): Jede Cauchy Folge ist beschränkt (s.o.). Jede Cauchy Folge mit konvergenter Teilfolge konvergiert (s.o.).

(v)$\Longrightarrow$ (ii): Ist I_n eine Intervallschachtelung, so bilden die Mittelpunkte (rechte Randpunkte, linke Randpunkte,...) eine Cauchy Folge. Der Grenzwert x hat die gewünschten Eigenschaften. □

Nach Hause nehmen: Die Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ liefert konvergente Folgen:

- Die Folge $(\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge.
- Monotone beschränkte Folge konvergieren.
- Jede Cauchy Folge konvergiert.

Darauf beruhen mehr oder weniger alle Betrachtungen zu Konvergenz.

Ende der 13. Vorlesung

3. Teilfolgen und Häufungspunkte

Wir kommen nun zu einem wichtigen Konzept, das das Konzept der Teilfolge komplementiert.

Notation: Eine Menge X heißt endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt und eine bijektive Abbildung $j : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$. Andernfalls heißt sie unendliche (siehe später).

Lemma. *(Charakterisierung Häufungspunkt) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann sind aquivalent:*

(i) *Es gibt eine Teilfolge von (x_n), die gegen x konvergiert.*
(ii) *Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\}$ unendlich.*

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund von (i) gibt es eine Teilfolge x_{n_k} mit $x_{n_k} \to x$, $k \to \infty$. Damit folgt also für $k \geq k_\varepsilon$

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Damit gilt

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\} \supset \{n_k : k \geq k_\varepsilon\}$$

und es folgt die Behauptung.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Wir konstruieren induktiv eine Teilfolge mit

$$|x_{n_k} - x\| < \frac{1}{k}.$$

Diese Teilfolge konvergiert dann also gegen x.

$k = 1$: Wähle n_1 mit $|x_{n_1} - x| < 1$.

$k \Longrightarrow k + 1$: Aufgrund von (ii) ist die Menge

$$A := \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{1}{k+1}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_k\}$$

nichtleer. Wir können also n_{k+1} aus A wählen z.B. als kleinstes Element von A. Dann gilt

$$|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}.$$

Damit folgt $(x_{n_k}) \to x$ (nach Archimedischen Axiom). □

Beachte: Beweis nutzt: $x_n \to x \Longleftrightarrow$ Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < 1/k$ für $n \geq n_k$.

Definition. *(Häufungspunkt) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt Häfungspunkt von (x_n), wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen des vorigen Lemma gilt.*

Bemerkung. Gibt es eine Teilfolge von (x_n) die gegen ∞ / $-\infty$ konvergiert, so spricht man manchmal vom uneigentlichen Häufeungspunkt ∞ bzw. $-\infty$.

Erkläre im Spaziergängermodell, das Häuffen.

Beispiele. (a) $(-1)^n$ hat die beiden Häufungspunkte -1 und 1.

(b) Die Folge x_n mit $x_n = \pi$ für n hat Rest 0 bei Division durch 3, $x_n = 7$ für n mit Rest 1 bei Division durch 3, $x_n = 42$ für n mit Rest 2 bei Division durch 3 hat die drei Häufungspunkte $\pi, 7$ und 42.

(c) $y_n = x_n + \frac{1}{n}$ (mit (x_n) aus (b)) hat ebenfalls die Haufungspunkte $\pi, 742$ (obwohl diese Werte nicht angenommen werden; vgl. Konvergenz!)

Beachte. Der Satz von Bolzano/Weierstrass lässt sich nun so formulieren: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Haufungspunkt.

Für beschränke Folgen in $\mathbb{R}$ gibe es zwei besondere Häufungspunkte, nämlich den grössten und den kleinsten Häufungspunkt. Das werden wir jetzt genaür untersuchen:

Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

Dann ist die Folge (X_N) mit

$$X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$$

fallend in N. Damit existiert

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{N\to\infty} X_N = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

und wird als 'Limsup' oder 'Limes superior' von (x_n) bezeichnet. Hier ist der Wert $+\infty$ möglich (wenn nämlich die Folge nach oben nicht beschränkt ist).

Analog sieht man, daß die Folge (X_M) mit

$$X_M := \inf\{x_n : n \leq M\}$$

wachsend in M ist. Damit existiert

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{M\to\infty} X_M = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}$$

und wird als 'Liminf' oder 'Limes inferior' von (x_n) bezeichnet. Hier ist der Wert $-\infty$ möglich (wenn nämlich die Folge nach unten nicht beschränkt ist).

Ende der 14. Vorlesung

Lemma. *(Charakterisierung von* $\limsup/\liminf$*) Sei* (x_n) *eine Folge in* $\mathbb{R}$*. Sei* $x \in \mathbb{R}$*. Dann sind aquivalent:*

(i) $x = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

(ii) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt:*
- *Es gibt ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *mit* $x_k \leq x + \varepsilon$ *für alle* $k \geq n_\varepsilon$
- *Die Menge* $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x - \varepsilon\}$ *ist unendlich.*

(iii) *Es ist* (x_n) *nach oben beschränkt und es ist* x *der grösste Häufungspunkt von* (x_n) *(d.h.* x *ist Häufungspunkt von* (x_n) *und es gibt keinen grösseren Häufungspunkt).*

Analoge Aussagen gelten für $\liminf$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$. Sei $X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$. Wegen $X_N \to x$ fallend, existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_k \leq \sup\{x_n : n \geq N_0\} < x + \varepsilon$$

für alle $k \geq N_0$ und es ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x - \varepsilon\}$ unendlich.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): (x_n) *nach oben beschränkt.* Das folgt aus der ersten Eigenschaft .
x *ist Häufungspunkt.* Das folgt aus den beiden Eigenschaften und der Charakterisierung von Häufungspunkte.
Es gibt keinen grösseren Häufungspunkt. Das ist klar nach der ersten Eigenschaft.

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_ε mit $x_n \leq x + \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ (andernfalls gäbe es nach Bolzano/Weiersterass eine Teilfolge, die gegen eine grössere Zahl als x konvergiert. Widerspruch *grösster* HP.). Damit folgt

$$X_N \leq x + \varepsilon$$

für alle $N \geq n_\varepsilon$. Damit folgt

$$\limsup x_n = \lim X_N < x + \varepsilon.$$

Umgekehrt gibt es, da x ein Häufungspunkt ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ beliebig grosse n mit $x_n \geq x - \varepsilon$. Damit folgt $X_N \geq x - \varepsilon$ für alle N. Damit folgt $X \geq x - \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Folgerung. *Es gilt* $\limsup x_n < C$ *genau dann wenn ein* $C' < C$ *und* $N_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $x_n \leq C'$ *für alle* $n \geq N$. *Enstprechendes gilt für* $\liminf$.

Beweis. $\Longrightarrow$: Das folgt leicht aus (ii).

$\Longleftarrow$: Das folgt sofort aus der Definition. □

Bemerkung. Ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $\sup\{x_n : n \geq N\} = \infty$ für alle N. Entsprechend folgt $\limsup x_n = \infty$. In diesem Fall gibt es eine Teilfolge, die gegen ∞ konvergiert. Man kann also in diesem Sinne ∞ als den grössten Häufungspunkt auffassen. Entsprechendes gilt für $-\infty$ und $\liminf x_n$.

Bemerkung. (Zweipunktkompaktifizierung) Wir betrachten $\pm\infty$ nicht als Punkte einer geeigneten Fortsetzung von $\mathbb{R}$. Ausdrücke wie $x_n \to \infty$ definieren wir direkt. daß das gut möglich ist, liegt daran, daß man diese

Punkte zu $\mathbb{R}$ dazunehmen kann und damit die sogenannte Zweipunkt-kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ erhält. Wir machen das an einer Zeichnung deutlich.

KAPITEL 5

Mächtigkeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir die 'Größe' von Mengen mittels der Anzahl ihrer Elemente. Wir werden drei Abstufungen kennenlernen: endliche Mengen, abzaehlbar unendliche Mengen und überabzählbare Mengen.

DEFINITION. *(Mächtigkeit)*

- *Eine Menge X heißt endlich, wenn sie leer ist oder ein $n \in \mathbb{N}$ existiert und eine bijektive Abbildung $j : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$. Dann heißt* 0 *bzw. n die Mächtigkeit oder Kardinalität von X.*
- *Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.*
- *Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$ gibt. In diesem Fall heißt J eine Abzählung und wir schreiben die Menge auch als $X = \{J(1), J(2), \ldots, \}$.*
- *Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar unendlich ist, heißt überabzählbar.*

Beachte. In dieser Vorlesung nennen wir eine Menge abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Diese Verwendung des Begriffes 'abzählbar' ist nicht einheitlich.

Beispiele.

- $\mathbb{N}$ ist abzählbar.
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ abzählbar.
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar. (Bew. $\mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}, 2n \mapsto n, 2n+1 \mapsto -n.$)

Wir wiederholen das Prinzip der Wohlordnung: Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.
Anschaulich klar: Laufe $\mathbb{N}$ beginnend bei 1 ab, bis man auf die Menge trifft. Details hier: Sei M eine solche Teilmenge. Angenommen: M hat kein kleinstes Element. Dann ist $B := \{n \in \mathbb{N} : \{1, \ldots, n\} \in \mathbb{N} \setminus M\}$ induktiv ($1 \in B$: klar. $n \in B \Longrightarrow (n+1) \in B$: klar. Damit ist M leer.)

LEMMA. *Sei X eine Menge und $H : \mathbb{N} \longrightarrow X$ surjektiv. Dann ist entweder X endlich oder abzählbar unendlich.*

Beweis. Sei X nicht endlich. Zu zeigen: Es existiert ein $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bijektiv.
Wir konstruieren induktiv ein $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$ mit

- $\{J(1), J(2), \ldots\} \supset \{H(1), \ldots, H(n)\}$.
- Die Elemente $J(1), \ldots, J(n)$ sind paarweise verschieden.

Aufgrund des ersten Punktes ist J surjektiv. Aufgrund des zweiten Punktes ist J injektiv.

Zur Konstruktion:
$n = 1$: $J(1) = H(1)$.
$n \Longrightarrow n+1$: Betrachte $M := \{k > n : H(k) \notin \{J(1), \ldots, J(n)\}\}$. Dann ist M nichtleer, da X unendlich ist. Damit hat M ein kleinstes Element m. Dann setzt man $J(n+1) := m$. Dann gelten die gewünschten Eigenschaften (Check!). □

Lemma. *Es sind* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *und* $\mathbb{N} \times \{1, \ldots, n\}$ *für beliebiges* $n \in \mathbb{N}$ *abzählbar. Insbesondere ist* $X \times Y$ *abzählbar für alle abzählbaren* X *und* Y.

Beweis. $\mathbb{N} \times \{1, \ldots, n\}$ *abzählbar.* Zeichnung.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *abzählbar.* Zeichnung.

Das 'Insbesondere' ist nun klar. □

Bemerkung. Das Lemma liefert leicht, daß auch $X_1 \ldots X_n$ abzählbar ist für abzählbare $X_1, \ldots, X_n$. (Übung: Wie ist es mit abzählbaren Produkten bestellt?)

Theorem. *Es ist* $\mathbb{Q}$ *abzählbar.*

Beweis. Betrachte

$$H : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \times \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad H(n, m, q) = q\frac{n}{m}.$$

Dann ist H surjektiv und nach dem vorangehenden Lemma ist $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \times \{-1, 1\}$ abzählbar. Damit folgt die Aussage aus dem ersten Lemma des Abschnitts. □

Theorem. *Es ist* $\mathbb{R}$ *überabzählbar. Tatsächlich ist jedes Interval positiver Länge in* $\mathbb{R}$ *überabzählbar.*

Beweis. Angenommen: $\mathbb{R}$ ist abzählbar.

Dann gibt es eine Abbildung $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} = \{J(1), J(2), \ldots, \}$. Wir konstruieren nun rekursiv eine Intervallschachtelung (I_n), $n \in \mathbb{N}$ mit

- $J(n) \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $|I_{n+1}| = \frac{1}{3}|I_n|$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es einen Punkt x der zu allen I_n gehört. Damit stimmt x dann mit keinem der $J(n)$ überein (da $J(n) \notin I_n$). Das ist ein Widerspruch.

Es bleibt die I_n zu konstruieren:

$n = 1$: Setze $I_1 := [J(1) + 1, J(1) + 2]$.

$n \Longrightarrow (n+1)$: Teile I_n in drei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle. Es kann $J(n+1)$ nicht in allen drei Teilintervallen liegen. Wähle für I_{n+1} ein Teilinterval, das $J(n+1)$ nicht enthält. $\square$

Ende der 15. Vorlesung

FOLGERUNG. *(Dichtheit von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) In jedem Interval positiver Länge in $\mathbb{R}$, gibt es Punkte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist jedes Interval positiver Länge überabzählbar. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, kann auch der Schnitt von $\mathbb{Q}$ mit einem solchen Interval nur abzählbar sein. Damit folgt die Behauptuung. $\square$

Bemerkung. Auch wenn ein Intervall positiver Länge 'fast nur' aus Punkten aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besteht, kann es schwierig sein, einen solchen Punkt anzugeben.

Wir diskutieren nun, dass die Potenzmenge einer Menge immer 'echt größer' als die Menge ist.

PROPOSITION. *Sei X eine beliebige Mengen und $P(X)$ die Potenzmenge von X. Dann gibt es keine surjektive Abbildung j von X nach $P(X)$.*

Beweis. Übung. $\square$

KAPITEL 6

Die komplexen Zahlen

Ziel. Finde Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$,, in dem $x^2+1=0$ eine Lösung hat Nenne diese Lösung i. Mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist dann auch $a+ib$ in diesem Körper, und es gilt

$$(a+ib)(a'+ib')) = aa' + iba' + iab' + iibb' = aa' - bb' + i(ba' + ab').$$

Damit ist also die Menge $a+ib$ unter Multiplikation abgeschlossen. Das motiviert folgenden Satz.

THEOREM. *Die Menge* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *versehen mit der Addition* $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ *und der Multiplikation* $(a,b)(c,c) = (ac-bd, ad+bc)$ *ist ein Körper mit neutralem Element* $(0,0)$ *der Addition und neutralem Element* $(1,0)$ *der Multiplikation.*
Die Inversen bzgl Addition von (a,b) *ist gegeben durch* $(-a,-b)$.
Das Inverse bzgl der Multiplikation von $(a,b) \neq (0,0)$ *ist gegeben durch*

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Beweis. Direkte Rechnungen (vgl. Algebravorlesung). □

Zeichnung. Ebene, imaginäre Achse, reelle Achse.

DEFINITION. *Der Körper aus dem vorangehenden Satz wird mit* $\mathbb{C}$ *bezeichnet.*

Notation. Wir schreiben i für $(0,1)$. Ausserdem identifizieren wir die Element der Form $(a,0)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Damit lässt sich das Element $(a,b) \in \mathbb{C}$ schreiben als $(a,b) = (a,0) + bi = a + ib$.

PROPOSITION. *Es gilt* $i^2 = -1$.

Beweis. Nachrechnen. □

DEFINITION. *Für* $z = a+ib \in \mathbb{C}$ *definieren wir den Imaginärteil* $\Im z := b$ *und den Realteil* $\Re z := a$, *sowie die zu* z *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{z} := a - ib$ *und* $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Beachte. (a) Komplex Konjugieren bedeutet gerade Spiegeln an der reellen Achse.
(b) $|z|^2 = z\overline{z}$.

Folgende Regeln sind einfach zu beweisen.

PROPOSITION. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*
(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ *und* $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ *für* $z \neq 0$.
(c) $\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
(d) $z \neq 0 \Longrightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
(e) $|zw| = |z||w|$ *und für* $z \neq 0$ $|1/z| = 1/|z|$.

Beweis. Hausaufgabe. □

PROPOSITION. *(Dreiecksungleichung) Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Bemerkung. In $\mathbb{C}$ kann man Dreiecksungleichung gut deuten.)
Der Betrag erlaubt es uns ähnlich wie in $\mathbb{R}$ das Konzept der Konvergenz und der Cauchy Folge zu definieren. Diesem Thema widmen wir uns als nächstes.

DEFINITION. *Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|z_n - z| < \varepsilon$.*

Notation. Wieder kann eine Folge höchstens gegen einen Wert konvergieren und dieser Wert heißt dann Grenzwert und schreiben $z = \lim z_n$ oder $z_n \to z$, $n \to \infty$.

Man definiert für $\varepsilon > 0$ die ε-Umgebung von w durch

$$U_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\}.$$

Es heißt dann $U_\varepsilon(w)$ auch die offene ε-Kugel um w.

Bemerkung. Allgemein nennt man eine Menge U eine Umgebung von z, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(w) \subset U$.

LEMMA. *Für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:*
- (i) *Es konvergiert (z_n) gegen z.*
- (ii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon > 0$ mit $z_n \in U_\varepsilon(z)$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.*
- (iii) $|z - z_n| \to 0$, $n \to \infty$.

Konvergenz in $\mathbb{C}$ und Konvergenz in $\mathbb{R}$ haben viel miteinander zu tun. Tatsächlich lassen sich wesentliche Betrachtungen zu Konvergenz in $\mathbb{C}$ auf die entsprechenden Betrachtungen in $\mathbb{R}$ zurückführen. Dazu dient folgende Proposition.

PROPOSITION. *Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ gilt*

$$|z| \leq |a| + |b| \;\; sowie |a|, |b| \leq |z|.$$

Beweis. Nach Definition gilt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Erste Ungleichung: Es gilt

$$a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2.$$

Damit folgt also

$$|z|^2 \leq (|a| + |b|)^2.$$

Da die Wurzelfunktion monoton ist ($x < y \Longrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$) folgt damit die Behauptung durch Wurzelziehen.
Zweite Ungleichung: Mit $a^2, b^2 \leq a^2 + b^2$ folgt also

$$|a|, |b| \leq |z|.$$

Das beendet den Beweis. □

Als erste Folgerung zeigen wir:

Proposition. *Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Folge (z_n) konvergiert in $\mathbb{C}$.*
(ii) *Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren in $\mathbb{R}$.*

In diesem Fall gilt $\lim z_n = \lim a_n + i(\lim b_n)$.

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Es gelte $z_n \to z = a + ib$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Dann gilt für $n \geq n_\varepsilon$ also nach voriger Proposition

$$|a_n + a|, |b_n - b| \leq |z_n - z| < \varepsilon.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$. $a_n \to a$, $b_n \to b$. Sei $z := a + ib$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also ein $n_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_a$ und ein $n_b \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_b$. Für $n \geq \max\{n_a, n_b\}$ gilt also nach voriger Proposition

$$|z - z_n| = |a + ib - (a_n + ib_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon.$$

□

Damit kann man aus den Rechenregeln für Konvergenz in $\mathbb{R}$ leicht die folgenden Rechenregeln für Konvergenz in $\mathbb{C}$ ableiten.

Proposition. *(Rechenregeln)*
(a) $z_n \to z$, $w_n \to w \Longrightarrow z_n + w_n \to z + w$.
(b) $z_n \to z$, $w_n \to w \Longrightarrow z_n w_n \to zw$.
(c) $z_n \to z$, $z \neq 0$, $z_n \neq 0$ *alle* $n \Longrightarrow 1/z_n \to 1/z$.
(d) $z_n \to z \Longrightarrow |z_n| \to |z|$.

Ähnlich wie in $\mathbb{R}$ definiert man folgende Konzepte.

Definition. *(Cauchy Folge) Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt Cauchy Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Theorem. *Für eine Folge* (x_n) *in* $\mathbb{C}$ *sind äquivalent:*

(i) (z_n) *ist eine Cauchy Folge.*
(ii) (z_n) *ist konvergent.*

Beweis. Sei $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
(z_n) Cauchy Folge $\Longleftrightarrow$ $(a_n), (b_n)$ Cauchy Folgen in $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ $(a_n), (b_n)$ konvergent in $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ z_n konvergent.
(Dabei haben wir obige Charakterisierung von Konvergenz verwendet.)
□

Folgerung. *Es ist* $\mathbb{C}$ *vollständig d.h. jede Cauchy-Folge in* $\mathbb{C}$ *konvergiert.*

Beachte. Die Vollständigkeit ist eine fundamentale analytische Eigenschaft der komplexen Zahlen.
Da es in $\mathbb{C}$ keine Anordnung gibt (Warum? $x^2 + 1 = 0$ hat Lösung!), gibt es auch keine monotonen Folgen und also auch keine Konvergenz monotoner Folgen. Aber es gibt eine komplexe Version des Satz von Bolzano-Weierstrass gilt. Dazu führen wir noch folgenden Begriff ein: Eine Folge (z_n) heißt beschränkt, wenn ein $C > 0$ existiert mit $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Theorem. *(Bolzsano - Weierstrass - komplex). Sei* (z_n) *eine beschrankte Folge in* $\mathbb{C}$. *Dann hat* (z_n) *eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Da (z_n) beschränkt ist, sind auch die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt. Da (a_n) beschrankt ist, gibt es nach der reellen Version des Satz von Bolzano - Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k^{(1)}})_k$. Dann ist aber auch $(b_{n_k^{(1)}})$ beschränkt und hat also eine konvergente Teilfolge b_{n_k}. Dann konvergiert sowohl (a_{n_k}) also auch (b_{n_k}). Damit konvergiert dann auch (z_{n_k}). □

KAPITEL 7

Summen und Reihen

Reihen liefern (eigentlich nur) eine spezielle Art Folgen darzustellen. Diese Art ist in vielerlei Zusammenhängen von Interesse.

Ziel: Gegeben eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$. Definiere

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Problem: Das Problem sind wieder die '...' oder anders gesagt, die Tatsaeche, dass ündlich viele Summanden gibt.

Lösung. Summiere über endlich viele Summanden und bilde Grenzwert.

Zeichnung.
S_1: a_1
S_2: $a_1 + a_2$
S_3: $a_1 + a_2 + a_3$
S_4: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
....

Definition. *(Reihe gleich Folge der Partialsummen) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Zu $n \in \mathbb{N}$ ist dann die n-te Partialsumme der (a_n) definiert durch*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge (S_n) dieser Partialsummen wird dann als Reihe mit den Gliedern a_n bezeichnet. Diese Reihe heißt konvergent (mit Grenzwert S), wenn die Folge (S_n) konvergiert (mit Grenzwert S).

Notation. Wir schreiben

$$\sum_{k\geq 1} a_k \quad \text{für die Reihe, d.h. die Folge der Partialsummen}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{für den Grenzwert der Reihe, d.h. } \lim_{n\to\infty} S_n$$

(falls dieser existiert).

Ende der 16. Vorlesung

Bemerkung. (x_n) beliebige Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$ für $a_1 = x_1$, $a_n := x_n - x_{n-1}$ $n \geq 2$. In diesem Sinne lässt sich jede Folge (in $\mathbb{C}$) als Reihe darstellen.

Beispiel. (Geometrische Reihe) Ist $a \in \mathbb{C}$ beliebig und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ so ist $\sum_{k\geq 0} aq^k$ konvergent gegen $\frac{\alpha}{1-q}$.
Bew. Es gilt $|q^n| = |q|^n \to 0$. Damit folgt die Aussage aus der Formel für die geometrische Summe.
Anwendung. $\sum_{k=N}^{\infty} \alpha\beta^{k+l} = \alpha\beta^{N+l} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \alpha\beta^{N+1} \frac{1}{1-\beta}$ für $|\beta| < 1$.

Beispiel. $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert gegen 1.
Bew. $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{n} \to 1$. Die in der zweiten Gleichung genutzte Technik ist unter dem Namen Partialbruchzerlegung bekannt (s. später).

Da es sich um Folgen handelt, gelten für konvergente Reihen natürlich weiterhin die Rechenregeln für konvergente Folgen. Insbesondere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + \lambda b_k).$$

THEOREM. *(Charakterisierung Konvergenz) Sei (a_k) in $\mathbb{C}$ gegeben. Dann sind aquivalent:*
(i) *Die Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergiert.*
(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{k=m+1}^n a_k| < \varepsilon$ für alle $n_\varepsilon \leq m < n$. (**Zeichnung.** Endstück der Reihe.)*

Bemerkung. Es ist $|\sum_{k=m+1}^n a_k| = |S_n - S_m|$ gerade die Summe über ein 'Endstück' der Reihe.
Beweis. Reihe konvergiert $:\Longleftrightarrow$ Folge (S_n) der Partialsummen konvergiert $\Longleftrightarrow$ (S_n) ist Cauchy Folge $\Longleftrightarrow$ (i). □

Das Theorem liefert eine **notwendige** Bedingung für Konvergenz.

FOLGERUNG. *(Erster Test auf Konvergenz) Ist $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergent, so ist $|a_k|$ eine Nullfolge (d.h. $|a_k| \to 0$, $k \to \infty$).*

Beweis. $|a_k| = |\sum_{l=k}^k a_l| = |S_k - S_{k-1}| \to 0, k \to \infty$. □

Diese Bedingung ist nicht hinreichend:
Gegenbeispiel.(Harmonische Reihe ist divergent) $\sum_{k\geq 1} 1/k$ ist divergent (**obwohl** $\frac{1}{n} \to 0$).
Bew. $1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+\ldots+1/8)+\ldots+(\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}})\ldots.$

Besonders wichtig sind Reihen mit nichtnegativen Gliedern. Denn darauf lassen sich viele Konvergenzbetrachtungen zurückführen. Für diese Reihen gilt:

LEMMA. *(Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern) Sei Folge* (a_k) *mit* $a_k \geq 0$ *gegeben. Sei* $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$. *Dann sind aquivalent:*

(i) *Die Reihe* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *ist konvergent (d.h.* (S_n) *konvergent).*
(ii) *Die Reihe* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *ist beschränkt (d.h.* $\sup S_n < \infty$*).*
(iii) *Für alle* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *mit*

$$a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m < \varepsilon$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ *mit* $n_\varepsilon \leq n < m$.

Beweis. Wegen $a_k \geq 0$ ist (S_n) monoton wachsend. Damit sind Konvergenz (i) und Beschränktheit (ii) äquivalent. Weiterhin ist Konvergenz in $\mathbb{R}$ äquivälent dazu, daß (S_n) eine Cauchy Folge ist. Das bedeutet aber gerade (iii). □

Notation. Ist $a_k \geq 0$, so schreiben wir $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt.

Für Reihen erweist sich eine Verschärfung des Begriff der Konvergenz als sinnvoll. Dies ist der Punkt, an dem sich die Theorie der Reihen von der Theorie der Folgen unterscheidet.

DEFINITION. *Sei* (a_k) *eine Folge in* $\mathbb{C}$. *Dann heißt die Reihe* $\sum_{k\geq 1} a_k$ *absolut konvergent, wenn* $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ *konvergiert, d.h. wenn gilt*

$$\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty.$$

Beispiel. (Geometrische Reihe) Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist $\sum_{k\geq 1} \alpha q^k$ absolut konvergent (gegen $\frac{\alpha}{1-q}$). Ist $|q| \geq 1$, so ist die Reihe nicht konvergent.
Bew. Es gilt $|\alpha q^n| = |\alpha||q|^n$. Damit folgt absolute Konvergenz der Reihe für $|q| < 1$ (s.o.). Ist $|q| \geq 1$, so ist q^n keine Nullfolge und es folgt Divergenz.

Beispiel (Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert) Sei $a_k := (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Dann gilt:
- $\sum |a_k|$ nicht konvergent (harmonische Reihe).
- Es ist aber $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergent. (s.u.)

Bemerkung.

- Für Reihen mit nichtnegativen Gliedern ist Konvergenz gleichbedeutend mit absoluter Konvergenz.
- Absolute Konvergenz / Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder der Reihe abändert. (Es geht immer nur um a_k mit grossen k.)

THEOREM. *(Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz) Sei* (a_k) *eine Folge in* $\mathbb{C}$. *Ist* $\sum_{k\geq 0} a_k$ *absolut konvergent, so ist* $\sum_{k\geq 0} a_k$ *konvergent.*

Beweis. $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Zu zeigen: (S_n) ist Cauchy Folge. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der absoluten Konvergenz, konvergiert $\sum_{k\geq 1}|a_k|$. Damit existiert also nach dem Lemma ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_\varepsilon$. Damit gilt also für $n, m \geq n_\varepsilon$ und $n < m$

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die Reihe (nach dem Theorem zur Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern). □

Bemerkung. (Absolute Konvergenz stabil bei Umordnungen) Absolute Konvergenz ist stabil unter Umordnungen (s.u.). Konvergente aber nicht absolut konvergente Reihen sind extrem instabil under Umordnung (s.u.). Daher ist absolute Konvergenz oft wesentlich nützlicher als Konvergenz, wenn es um Reihen geht.

Proposition. *(Dreieckungleichung für Reihen). Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Existiert $\sum a_k$ so gilt $|\sum_{k=1}^\infty a_k| \leq \sum_{k=1}^\infty |a_k|$, wobei die rechte Seite den Wert unendlich hat, wenn die Summe nicht absolut konvergiert.*

Beweis. Es reicht den Fall zu betrachten, daß $\sum a_k$ absolut konvergiert. Da Betrag mit Konvergenz von Folgen verträglich ist, gilt

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| = |\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k| = \lim_{n\to\infty}|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|.$$

□

Theorem. *(Majorantenkriterium) Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ und $b_k \geq 0$ mit*

- *$|a_k| \leq b_k$ für $k \geq k_0$ und*
- *$\sum_{k\geq k_0} b_k < \infty$,*

so ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

Beweis. Z.z. $\sup \sum_{k=1}^n |a_k| < \infty$ (Lemma zur Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern). Nach Voraussetzung gibt es $C \geq 0$ mit $\sum_{k=k_0}^n b_k \leq C$ für all $n \geq k_0$. Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1}|a_k| + \sum_{k=k_0}^{n}|a_k| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1}|a_k| + \sum_{k=k_0}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{k_0-1}|a_k| + C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiel. (Dezimalzahldarstellung) Ist (a_n) eine Folge mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, so konvergiert

$$\sum_{k\geq 1} a_k 10^{-k}$$

absolut.
Bew. Sei $b_k := 9/10^k$. Dann gilt $|a_k 10^{-k}| \leq b_k$ und $\sum b_k$ existiert (da geometrische Reihe).

Weitere Beispiele.

- $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.
  Bew. $0 \leq 1/k^2 \leq 1/k(k-1)$ und $\sum 1/k(k-1)$ konvergent. Nun folgt Beh. aus Majorantenkriterium.
- $\sum_{k\geq 1} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert absolut.
  Bew. $\frac{n!}{n^n} = \frac{12...n}{nn...n} \leq 2/n^2$ und $\sum \frac{1}{n}^2$ konvergiert. Nun folgt Beh. aus Majorantenkriterium.

Man kann das Majorantenkriterium auch umdrehen.

Folgerung. *(Minorantenkriterium) Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Gilt $b_k \geq |a_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ab einem k_0 und ist $\sum a_k$ divergent, so ist auch $\sum b_k$ divergent.*

Beweis. $\sum b_k$ konvergent $\Longrightarrow \sum |a_k|$ absolut konvergent. Widerspruch. $\square$

Beispiele.

- $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ist divergent.
  Bew. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}$ und $\sum \frac{1}{n+1}$ divergent (harmonische Reihe).
- Sei

$$a_k := (\text{k-te ungerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k-1}$$

  und

$$b_k := (\text{k-te gerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k}.$$

  Dann ist $\sum a_k$ und $\sum b_k$ divergent.
  Bew. Wäre eine der beiden Summen konvergent, so müsste auch die andere konvergieren nach dem Majorantenkriterium. Dann wäre aber auch die harmonische Reihe konvergent.

Theorem. *(Quotientenkriterium) Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $a_k \neq 0$ für alle k ab einem k_0. Gilt $q := \limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut. Gilt $p := \liminf_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$, so divergiert $\sum a_k$.*

Beweis. $q < 1$ Sei $\widetilde{q}$ eine Zahl mit $q < \widetilde{q} < 1$. (Zeichnung.) Wegen $q = \limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \widetilde{q}$$

für alle $k \geq N$. Das impliziert

$$|a_n| \leq \widetilde{q}|a_{n-1}| \leq \cdots \leq \widetilde{q}^{n-N}|a_N| \leq C\widetilde{q}^n$$

für alle $n \geq N$. Weiterhin ist $C\sum_{n\geq N}\widetilde{q}^n$ konvergent (als geometrische Reihe). Damit folgt nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der ursprünglichen Reihe.

$q > 1$: ähnlich wie im vorigen Fall schliesst man, daß ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_{k+1}|/|a_k| \geq 1$$

für alle $k \geq N$. Damit folgt

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \ldots \geq |a_N|$$

für alle $k \geq N$. Also ist $|a_k|$ keine Nullfolge. Damit konvergiert die Reihe nicht. □

Ende der 17. Vorlesung

Bemerkung. Für $q = 1$ bzw. $p = 1$ ist jedes Konvergenzverhalten möglich.

- $a_k = \frac{1}{k}$. Dann $q = p = \lim \frac{1/(k+1)}{1/k} = \lim \frac{k}{k+1} = 1$ und $\sum a_k$ divergent.
- $a_k = \frac{1}{k^2}$. Dann $q = p = \lim \frac{1/(k+1)^2}{1/k^2} = \lim \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$ und $\sum a_k$ konvergent.

Beispiel - Exponentialreihe. Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig und $a_k := z^k/k!$. Dann ist die Exponentialreihe

$$\sum_{k\geq 0} a_k = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$$

absolut konvergent und der Grenzwert wird als e^z bezeichnet.
Bew. Das folgt aus dem Quotientenkriterium wegen

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z^{k+1}/(k+1)|}{|z^k/k!|} = \frac{|z|}{|k+1|} \to 0 < 1.$$

THEOREM. *(Wurzelkriterium) Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $q := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Gilt $q < 1$, so ist $\sum a_k$ absolut konvergent. Gilt $q > 1$ so ist $\sum a_k$ divergent.*

Beweis. $q < 1$: Sei $\widetilde{q}$ mit $q < \widetilde{q} < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \widetilde{q}$$

für alle $k \geq N$. Damit gilt also

$$|a_k| \leq \widetilde{q}^k$$

für alle $k \geq N$. Die Reihe $\sum_{k\geq N}\widetilde{q}^k$ konvergiert (geometrische Reihe). Damit folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergent von $\sum a_k$.

$q > 1$: Es gibt undendlich viele k mit $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, also $|a_k| \geq 1$. Damit ist $|a_k|$ keine Nullfolge.

□

Bemerkung. Für $q = 1$ ist jedes Konvergenzverhalten möglich.
- $a_k = 1/k$. Dann $q = \lim \sqrt[k]{1/k} = 1$ und $\sum a_k$ divergent.
- $a_k = 1/k^2$. Dann $q = \lim \sqrt[k]{1/k^2} = 1$ und $\sum a_k$ konvergent.

Beispiel. $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$ keine Nullfolge, $b_n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$. Dann folgt aus dem Wurzelkriterium wegen $\sqrt[n]{b_n} = 1/e$ die Konvergenz.

Bemerkung. Das Quotientenkriterium ist (oft) leichter anzuwenden als das Wurzelkriterium. Das Wurzelkriterium ist aber stärker. Genauer gilt:

- Ist $b_n > 0$, so gilt $\limsup \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. (siehe Weihnachtszettel). Idee :

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{b_1}} \sqrt[n]{b_1 \frac{b_2}{b_1} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}} \sim \sqrt[n]{\frac{b_{N+1}}{b_N} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}} \leq \sqrt[n]{q^{n-N}} = q.$$

- Es gibt Reihen, deren Konvergenz aus dem Wurzelkriterium folgt aber nicht aus dem Quotientenkriterium. Ein Beispiel ist folgendes:

$$a_k := \begin{cases} 2^{-k} & : \text{ k gerade} \\ 3^{-k} & : \text{ k ungerade} \end{cases}$$

Dann ist $\sqrt[k]{a_k}$ gleich $1/2$ oder $1/3$, also $\limsup \sqrt[k]{a_k} = 1/2 < 1$ aber es gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{2^{k-1}}{3^k} & : \text{ k gerade} \\ \frac{3^k}{2^{k+1}} & : \text{ k ungerade} \end{cases}$$

Für reelle Reihen gibt es zwei weitere Konvergenzkriterien, die von der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ Gebrauch machen.

THEOREM. *(Leibnizkriterium) Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$ (d.h. $a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq 0$ und $a_k \to 0$). Dann ist die alternierende Reihe $\sum(-1)^k a_k$ konvergent.*

Beweis. Sei $n > l$. Dann gilt

$$|\sum_{k=l}^{n}(-1)^k a_k| = |a_l - a_{l+1} + a_{l+2} - \ldots a_k| \leq |a_l| \to 0, l \to \infty.$$

Hier: Erste Gleichung: Kein Vorzeichen bei a_l, da Betrag; Zweite Gleichung: Formaler Beweis durch Induktion, Zeichnung, nütze Monotonie; Konvergenz gegen 0, da Nullfolge).
Damit ist $\sum(-1)^k a_k$ eine Cauchy-Folge, also konvergent. □

Bemerkung. Die Vorausetzungen sind nötig:

Nullfolge: Immer nötig.

Monotonie: $a_n = 2/n$ n-gerade $a_n = 0$ sonst. Dann ist $\sum(-1)^n a_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ divergent.

Theorem. *(Verdichtungskriterium) Sei (a_n) eine nichtnegative fallende Folge in $\mathbb{R}$ (d.h. $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots 0$.) Dann konvergiert $\sum_{k\geq 1} a_k$ genau dann wenn $\sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p}$ konvergiert.*

Beweis. **Zeichnung.** Einteilung von $\mathbb{N}$ in die Abschnitte von $[2^p, 2^{p+1})$.

Für $p \in \mathbb{N}$ setze $C_p := \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} a_k$. ($2^p$-Terme). Aufgrund der Monotonie gilt

$$(*) \quad 2^p a_{2^{p+1}} \leq C_p \leq 2^p a_{2^p}.$$

Aufgrund der Nichtnegativität der C_p und a_k reicht es jeweils Beschränktheit zu zeigen. Es gilt also

$\sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p}$ konvergent $\Longleftrightarrow \sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p}$ beschränkt $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \sum C_p$ beschränkt $\Longleftrightarrow \sum a_k$ beschränkt $\Longleftrightarrow \sum a_k$ konvergent.

$\square$

Beispiel. Sei $\alpha > 0$. Dann gilt $\sum \frac{1}{n}^\alpha$ konvergent $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.
Bew. Nach dem Verdichtungskriterium ist $\sum \frac{1}{n}^\alpha$ konvergent genau dann wenn $\sum 2^p/(2^p)^\alpha = \sum 1/(2^{\alpha-1})^p$ konvergiert. Letzteres ist eine geometrische Reihe mit $q = 1/2^{\alpha-1}$.

Ist $\alpha > 1$, so ist $2^{\alpha-1} > 1$ also $0 < q < 1$ und die geometrische Reihe konvergiert.
Iste $\alpha \leq 1$, so ist $2^{\alpha-1} \leq 1$ also $1 \leq q$ und die geometrische Reihe divergiert.

Wir betrachten jetzt noch Doppelsummen. Es geht also um

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, (i,j) \mapsto a_{ij} = a(i,j)$$

und wir fragen,

- ob $\sum a(n,m)$ in irgendeinem Sinne existiert
- und, wenn ja, ob es egal ist, wie man summiert d.h. ob gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i,j=1}^{N} a(i,j) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} a(k, N-k+1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Zeichnung zu den verschiedenen Summationsarten!

Das ist von eigenem Interesse und nützlich zum Studium von Produkten von Reihen und Umordnungen.

Achtung. Es geht um das Vertauschen von Grenzwerten!

Gegenbeispiel. Sei a_{ij} gegeben, so daß alle Einträge Null sind ausser auf der Diagonalen und der ersten unteren Nebendiagonalen. Seien die Einträge auf der Diagonalen $1, 2, 4, 8, \ldots$ und die Einträge auf der ersten Nebendiagonalen $-1, -2, -4, -8, \ldots$. Dann sind alle Spaltensummen absolut konvergent und haben den Wert 0. Die k-te Zeilensumme ist absolut konvergent und hat den Wert 2^{k-1}.

Idee. Gilt eine gleichmässige Schranke an die Doppelsummen, so sitzt die wesentliche 'Masse' in einem (grossen) Quadrat.

PROPOSITION. *Sei $a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Es gebe $C \geq 0$ mit $\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}| \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*
(a) $\sum a_{\tau(k)}$ für jedes injektive $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ absolut konvergent.
(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=0}^\infty |a_{\sigma(k)}| \leq \varepsilon$ für jedes injektive $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $\sigma(k) \notin \{1, \ldots, L\}^2$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. (a) Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\{\tau(1), \ldots, \tau(n)\} \subset \{1, \ldots, m\}^2$. Damit folgt
$$\sum_{k=0}^n |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{ij=1}^m |a_{ij}| \leq C.$$
Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt (a).
(b) Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert
$$S := \lim_{N\to\infty} \sum_{k,j=1}^N |a(j,k)|.$$
(Das ist die Summe über alle $|a_{ij}|$.) Daher existiert also ein $L \in \mathbb{N}$ mit
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k,l=L}^N |a_{kl}| \leq \varepsilon. \ (*)$$
Ist nun $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ injektiv mit $\sigma(k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, L\}^2$, so folgt aus $(*)$
$$\sum_{k=0}^m |a_{\sigma(k)}| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k,l=L}^N |a_{kl}| \leq \varepsilon.$$
□

Ende der 18. Vorlesung

THEOREM. *(Konvergenz von Doppelsummen) Sei $a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Es gebe ein $C \geq 0$ mit $\sum_{ij=1}^m |a_{ij}| \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann existiert $\sum_{j=1}^\infty a_{ij}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und es existiert $\sum_{i=1}^\infty a_{ij}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und die Reihen*
$$\sum_{i\geq 1}\left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij}\right), \sum_{j\geq 1}\left(\sum_{i=1}^\infty a_{ij}\right), \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{l=1}^k a_{k-l+1,l}\right)$$

sind absolut konvergent und haben den gleichen Grenzwert, nämlich $\lim_{N\to\infty}\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}$.

Zeichnung der Summen.

Beweis. Das folgt aus (a) und (b) der vorigen Proposition:

Existenz der 'inneren' Summen: Das folgt aus (a) der vorigen Proposition (z.B. $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\tau(k) = a_{ik}...$)

Absolute Konvergenz der Doppelsummmen: Das ist klar nach Voraussetzung, etwa

$$\sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^\infty a_{ij}| = \sum_{i=1}^m |\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n a_{ij}| = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^n a_{ij}| \leq C.$$

(Grenzwert vertauscht mit Beträgen und mit endlichen Summen.

Gleichheit der Grenzwerte: Das folgt aus (b) der vorigen Proposition: In allen Summen wird über beliebig grosse Quadrate in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ summiert. Nach (b) der vorigen Proposition sind Summen über Terme ausserhalb solcher Quadrate beliebig klein. Damit folgt die Aussage (Check!). □

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus dem Satz.

FOLGERUNG. *(Cauchy-Produkt) Seien* (b_j), (c_i) *Folgen in* $\mathbb{C}$ *sodaß* $\sum b_j$ *und* $\sum c_i$ *absolut konvergent sind. Dann gilt*

$$(\sum_{i=1}^\infty c_i)(\sum_{j=1}^\infty b_j) = \sum_{k=1}^\infty\sum_{l=1}^k c_{k-l+1}b_l$$

Beachte. $\sum_{l=1}^k c_{k-l+1}b_l = \sum_{l=1}^k c_l b_{k-l+1}$.

Beweis. $C := \sum_{i=1}^\infty |c_i| < \infty$, $B := \sum_{j=1}^\infty |b_j| < \infty$. Setze $a_{ij} := c_i b_j$. Dann gilt

$$\sum_{ij=1}^m |a_{ij}| = \sum_{ij=1}^m |c_i b_j| = \sum_{ij=1}^m |c_i||b_j| = \sum_{i=1}^m |c_i|\sum_{j=1}^m |b_j| \leq CB < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit erfüllt a die Voraussetzung des vorigen Satz. Dessen Aussage liefert dann die Behauptung. □

Anwendung (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion):
Für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}z^n$ gilt

- $\exp(0) = 1$ und
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Funktionalgleichung)

Insbesondere verschwindet exp nirgends und es gilt

$$\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z).$$

Beweis. $\exp(0) = 1$. Das ist klar.

Es gilt die Funktionalgleichung. Das folgt mittels Cauchy-Produkt:

$$\begin{aligned}
\exp(z_1)\exp(z_2) &= (\sum_{k=0}^{\infty} z_1^k/k!)(\sum_{l=0}^{\infty} z_2^l/l!) \\
\text{(Cauchy-Produkt)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{z_1^m z_2^{k-m}}{m!(n-m)!} \\
\text{(Erweitern mit } 1 = n!/n!) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{k} \frac{n!}{m!(n-m)!} z_1^m z_2^{n-m} \\
\text{(Binomi)} &= \sum \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n \\
&= \exp(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

Zum 'Insbesondere'. Nach dem schon Bewiesenen gilt

$$1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z).$$

Das liefert die Aussage. □

Bemerkung. (Übung) Eine stetige (s.u.) Funktion $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $E(x+y) = E(x)E(y)$ ist durch ihren Wert an der Stelle $x = 1$ eindeutig bestimmt.

Wir kommen nun zur schon angesprochenen Stabilität von absolut konvergenter Reihen unter Umordnung.

DEFINITION. *(Umordnung) Ist $\sum_{k\geq 1} a_k$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so heißt $\sum_{k\geq 1} a_{\tau(k)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$.*

Beachte. Umordnung summiert über 'dieselben' Terme in einer anderen Reihenfolge.

FOLGERUNG. *(Absolute Konvergenz impliziert Stabilität unter Umordnung) Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergent, so ist jede Umordnung absolut konvergent und hat denselben Grenzwert.*

Beweis. Setze $c_{ij} := a_{\tau(j)} = a_i$ falls $i = \tau(j)$ und 0 sonst. **Zeichnung** Dann gilt

- j-te Spalte enthält $a_{\tau(j)}$ an der $\tau(j)$-ten Stelle (und sonst Nullen).
- i-te Zeile enthält a_i an der Stelle j mit $\tau(j) = i$ (und sonst Nullen).

Damit gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} = a_i$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$ und
$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{ij} = a_{\tau(j)}$$
für jedes $j \in \mathbb{N}$ sowie
$$\sum_{i,j=1}^{m} |c_{ij}| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = C < \infty.$$
Damit liefert der vorige Satz die Behauptung. $\square$

Nach Hause nehmen. Wenn die Reihen absolut konvergieren, darf man summieren wie man will und erhält immer den gleichen Grenzwert!

Gegenbeispiel. (Voraussetzung der absoluten Konverenz ist nötig) Betrachte die Reihe
$$1 - 1 + 1/2 - 1/2 + 1/3 - 1/3 \dots.$$
Dann gilt für die Partialsummen S_n also $S_n = 0$ falls n gerade und $S_n = 1/k$ falls $n = 2k - 1$. Damit folgt $S_n \to 0$, $n \to \infty$. Andererseits kann man die Summe so umordnen, daß sie divergiert:
$$(1 + 1/2) - 1 + (1/3 + \dots + 1/k) - 1/2 + (1/k + 1 \dots \frac{1}{n}) - 1/3..$$
so daß man immer wieder Summanden $\ge 1/2$ erhält...

Dieses Verfahren lässt sich verallgemeinern und führt auf den folgenden Satz:

Theorem. *(Riemannscher Umordnungsatz) Ist (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sum a_k$ konvergent aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung τ mit $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$. Ebenso existieren bestimmt divergente Umordnungen zu $+\infty$ und $-\infty$.*

Beweis. Wir geben eine Skizze. Die Grundidee ist, daß Konvergenz der Reihe ohne absolute Konvergenz nur auftreten kann, wenn die Reihe in zwei Teile zerlegt werden kann, die sich zu $+\infty$ bzw $-\infty$ addieren. Durch geeignetes 'Verschieben' der Balance zwischen diesen beiden Teilen lässt sich dann die gewünschte Konvergenz der Umordnung erzwingen.
Hier sind die Details: Teile die Folge (a_k) in positive und nichtpositive Terme wie folgt: Sei
$$a_k^+ := \ k\text{-tes positives Element von } (a_k)$$
und
$$a_k^- := -k\text{-tes nichtpositives Element von } (a_k).$$
Setze
$$A^+ := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^+, \ \ A^- := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^-,$$

wobei der Wert ∞ möglich ist. Dann gilt:

- $A^+ := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k^+ = \infty$ und $A^- := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k^- = \infty$.
- (a_n^+) und (a_n^-) sind Nullfolgen.

$(A^+, A^- = \infty$:
Bew. Angenommen A^+ und A^- endlich: Widerspruch zu $\sum a_n$ nicht absolut konvergent. Angenommen: A^+ endlich und A^- unendlich (oder umgekehrt): Widerspruch zu $\sum a_n$ konvergent.
Nullfolge: klar (da Summe konvergiert).)
Nun gehe so vor: Summiere a_k^+ bis gerade s überschritten wird; summiere nun a_k^- bis s gerade unterschritten wird etc. Wegen $A^+, A^- = \infty$ kann dieses Verfahren beliebig fortgesezt werden. Da (a_k^+) und (a_k^-) Nullfolgen sind, folgt die Behauptung. $\square$

FOLGERUNG. *(Absolute Konvergenz äquivalent zu unbedingter Konvergenz) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\sum a_n$ absolut konvergent.*
(ii) *Es konvergiert jede Umordnung von $\sum a_n$ (gegen denselben Grenzwert).*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): s.o.
(ii)$\Longrightarrow$ (i): Anwenden des Riemanschen Umordnungssatzes auf Realteil und Imaginärteil der Summe liefert absolute Konvergenz von $\sum \Re a_n$ und $\sum \Im a_n$. Damit folgt die Aussage. $\square$

KAPITEL 8

Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Stetigkeit von Funktionen ist ein fundamentales Konzept der Analysis, das man als Anwendung des Grenzwertkonzeptes sehen kann. Die Grundidee ist folgende: Eine Funktion f heißt stetig im Punkt p, wenn sie Punkte q, die nahe an p liegen, auf Werte abbildet, die nahe an $f(p)$ liegen:

- 'q nahe p impliziert $f(q)$ nahe $f(p)$'.

Zeichnung 'typischer' stetiger und unstetiger Funktionen.

Definition. *(Stetigkeit) Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt f stetig in $p \in D$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$|f(q) - f(p)| < \varepsilon$$

für alle $x \in D$ mit $|q - p| < \delta$. Ist f in jedem $p \in D$ stetig, so heißt f stetig auf D.

Unter Nutzen des Konzeptes der Kugel / r-Umgebung $U_r(z)$ mit Radius $r > 0$ um $z \in \mathbb{C}$ lässt sich obige Definition der Stetigkeit offenbar auch so ausdrücken: Es heißt f stetig in p, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(U_\delta(p) \cap D) \subset f(U_\varepsilon(f(p))).$$

Kurz:'Zu jeder offenen Kugel um $f(p)$ existiert eine Kugel um p, die in die Kugel um $f(p)$ abgebildet wird.' **Zeichnung.**

Bemerkung. Eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ heißt Umgebung von $z \in \mathbb{C}$ wenn ein $r > 0$ existiert mit $z \in U_r(z) \subset U$. Ist D eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $z \in D$, so heißt eine Teilmenge U von D eine Umgebung von z in D, wenn ein $r > 0$ existiert mit $z \in U_r(z) \cap D \subset U$. Damit ist dann eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in z genau dann, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(z)$ eine Umgebung von z in D ist (Übung).

Bemerkung

- Offenbar schliesst diese Definition die Fälle ein, daß $D \subset \mathbb{R}$ gilt und/oder f nur reelle Werte annimmt. Diesen Fällen werden wir uns später noch einmal besonders widmen.

Ende 19. Vorl.

- Ist $p \in D$ ein isolierter Punkt von D (d.h. es existiert ein $r > 0$ mit $\{p\} = D \cap U_r(p)$ Zeichnung), so ist jedes $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ in p stetig. (Bew. Wähle $\delta < r$.)

Beispiele.

- Die konstante Funktion $D \longrightarrow \mathbb{C}$ $x \mapsto c$, ist stetig.
  Bew. Es kann $\delta > 0$ beliebig gewählt werden.
- $id : D \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x$, ist stetig.
  Bew. Es kann $\delta = \varepsilon$ gewählt werden.
- Der Betrag $|\cdot| : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto |x|$, ist stetig.
  Bew. Dreiecksungleichung $||x| - |y|| \leq |x - y|$ zeigt, daß $\delta = \epsilon$ gewählt werden kann.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[k]{\ }$: $[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ ist stetig
  Bew. Wir zeigen zunächst eine Zwischenbehauptung:

$$|\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x}| \leq \sqrt[k]{|y - x|}$$

für alle $x, y \geq 0$.
  Beweis der ZB: Ohne Einschränkung sei $x < y$. Dann gilt $\sqrt[k]{y} > \sqrt[k]{x}$. Es ist also

$$\sqrt[k]{y} \leq \sqrt[k]{y - x} + \sqrt[k]{x}$$

zu zeigen. Es reicht also zu zeigen, daß

$$(\sqrt[k]{y})^k \leq \left(\sqrt[k]{y - x} + \sqrt[k]{x}\right)^k.$$

Das ist wahr nach dem binomischen Satz.

  Nach der ZB kann $\delta = \varepsilon^k$ gewählt werden.

Beachte: In bisherigen Beispielen konnte δ unabhängig von x gewählt werden konnte. Das wird sich im nächsten Beispiel ändern:

- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist stetig.

Bew. Es gilt:

$$\exp(z) - \exp(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(z^k - z_0^k) = (z - z_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} z^{k-1-l} z_0^l.$$

Für z mit $|z| \leq |z_0| + 1$ können wir dann abschätzen:

$$
\begin{aligned}
|\exp(z) - \exp(z_0)| &\leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k-1} (|z_0| + 1)^{k-1} \\
&= |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k(|z_0| + 1)^{k-1} \\
(c := |z_0| + 1) \quad &= |z - z_0| \sum_{k=1} \frac{1}{(k-1)!} c^{k-1} \\
&= |z - z_0| \exp(c)
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$|\exp(z) - \exp(z_0)| \leq C|z - z_0|$$

mit $C := \exp(c)$. Für z mit $|z| \leq |z_0| + 1$ und $|z - z_0| < \varepsilon/C$ gilt dann also $|\exp(z) - \exp(z_0)| < \varepsilon$. Damit folgt Stetigkeit (mit $\delta = \min\{1, \varepsilon/C\}$).

Wir diskutieren nun noch kurz eine Verschärfung des Konzeptes der Stetigkeit, die durch die Beispiele nahegelegt wird:

DEFINITION. *Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt gleichmässig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$|f(p) - f(q)| < \varepsilon$$

für alle $p, q \in D$ mit $|p - q| < \delta$.

Kurzfassung: Stetigkeit: $\delta = \delta(\varepsilon, x)$. Gleichmässige Stetigkeit $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Nach diesen einzelnen Beispielen kommen wir noch zu zwei Klassen von stetigen Funktionen.

Potenzreihen. Sei (a_n) in $\mathbb{C}$ mit $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} =: \rho < \infty$ und $R := 1/\rho$ (mit $R = \infty$ falls $\rho = 0$). Dann ist

$$f : U_R \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

durch eine absolut konvergente Reihe definiert und stetig.
Bew. Wir betrachten nur den Fall $R < \infty$. (Der andere Fall ist leichter.)
Reihe ist absolut konvergent: Das folgt aus dem Wurzelkriterium mit

$$\limsup \sqrt[k]{|a_k z^k|} = \limsup |z| \sqrt[k]{|a_k|} = |z|\rho < R\rho = 1.$$

Stetigkeit: Wie im Beispiel der Exponentialfunktion ergibt sich

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0) \sum_{l=0}^{k-1} z^{k-1-l} z_0^l.$$

Für z mit $|z| < \frac{|z_0|+R}{2} =: c < R$ (Zeichnung) ergibt sich dann

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k c^{k-1} = C|z - z_0|$$

mit $C := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k c^{k-1} < \infty$. (Hier folgt Endlichkeit von C nach dem Wurzelkriterum, Check!) Damit folgt Stetigkeit (mit $\delta = \min\{\varepsilon/C, c - |z_0|\}$).

Es heißt R der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Es ist R charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

- Für $|z| < R$ ist $\sum a_k z^k$ absolut konvergent. (Bew. s.o.)
- Für $|z| > R$ ist is $\sum a_k z^k$ divergent. (Klar, da dann $|a_k z^k|$ keine Nullfolge ist.)

Ist insbesondere $\sum a_k z^k$ konvergent für ein z, so folgt $|z| \leq R$. Damit gilt also

$$R = \sup\{r : \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergent für ein } z \text{ mit } |z| = r \}.$$

Lipschitzstetige Funktionen. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt lipschitzstetig, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

für alle $x, y \in D$. Offenbar ist jede lipschitzstetige Funktion (gleichmässig) stetig (mit $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$). Typische Beispiele von Lipschitzstetigen Funktionen sind folgende:

- Lineare Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = ax + b$.
- $|\cdot|$, $\Re$, $\Im$, id auf $\mathbb{C}$.
- (Übung) Ist $A \subset \mathbb{C}$, so ist die zugehörige Distanzfunktion
  $$d = d_A : \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty),\ d(z) := \inf\{|z - w| : w \in A\}$$
  Lipschitzstetig mit $C = 1$.

Die Wurzel $\sqrt[k]{\ } : [0, \infty) \longrightarrow)$ ist nicht lipschitzstetig. (Übung)

Bemerkung. Eine noch allgemeinere Klasse stetiger Funktionen bilden die *hölderstetige Funktionen.* Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt hölderstetig mit Exponent $\alpha > 0$, wenn ein $C > 0$ existiert mit $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < 1$. Jede Hölderstetige Funktion ist stetig.
(Bew. Ist $\alpha = 1/k$ so folgt dies aus der Stetigkeit der k-ten Wurzel. Zur Behandlung eines beliebigen $\alpha > 0$ wählt man ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \alpha$ und nutzt $|x - y|^{\alpha} < |x - y|^{1/k}$ für $|x - y| < 1$.)
Übung: Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ Hölderstetig mit Exponent $\alpha > 1$, so ist f konstant.
(**Bemerkung.** Manchmal wird auch in der Definition der Hölderstetigkeit die Einschränkung $|x - y| < 1$ weggelassen. Dann würde man

die oben definierte Klasse als lokal hölderstetige Funktionen bezeichnen. Auf beschränkten Mengen D stimmen die beiden Definitionen überein. Für unbeschränkte Mengen ist das im allgemeinen nicht der Fall (so sind etwa lineare nichtkonstante Funktionen g auf $\mathbb{R}$ hölderstetig im obigen Sinne, erfüllen aber nicht $|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ für $0 \leq \alpha < 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$). Dann hat obige Definition den Vorteil, daß jede ipschitzstetige Funktion automatische hölderstetig zu jedem Exponente $0 \leq \alpha \leq 1$ ist.)

Zur Abgrenzung geben wir noch einige Beispiele von unstetigen Funktionen:

Beispiel (Heaviside Funktion) Die Funktion $H : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$ mit $H(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$ ist unstetig in $x = 0$ und stetig in allen anderen Punkten.

Beispiel. Eine Funktion, die in keinem Punkt stetig ist, wird gegeben durch

$$1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}, 1_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bew. Das folgt, da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ sind, also jede ε-Kugel um ein $p \in \mathbb{R}$ sowohl Punkte von $\mathbb{Q}$ als auch von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthält.

Beispiel. (Übung) Die Funktion

$$N : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \; N(x) =:= \begin{cases} & : \quad \text{x irrational} \\ \frac{1}{p} & : \quad x = q/p \text{ mit } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

ist stetig in allen irrationalen Punkten und unstetig in den rationalen Punkten.

Es lässt sich Stetigkeit einer Funktion mit Konvergenz von Folgen charakterisieren und das ist sehr nützlich (da wir gut mit konvergenten Folgen umgehen können).

LEMMA. *(Folgencharakterisierung der Stetigkeit) Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann sind für $p \in D$ äquivalent:*

(i) *Es ist f stetig in p.*
(ii) *Für jede Folge (p_n) in D mit $p_n \to p$ gilt $f(p_n) \to f(p)$.*

Beweis. Sei $c = f(p)$.
(i)$\Longrightarrow$ (ii): $p_n \to p$ (z.z. $f(p_n) \to c$.) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach (i) ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$. Wegen $p_n \to p$ existiert ein $N = N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|p_n - p| < \delta$ für $n \geq N_\delta$. Damit gilt für $n \geq N$ also $|f(p_n) - c| \leq \varepsilon$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Angenommen nein: Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ 'ohne δ', d.h. mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $p_n \in D$ existiert mit

$|p_n - p| < \frac{1}{n}$ aber $|f(p_n) - c| \geq \varepsilon$. Dann gilt $p_n \to p$ aber nicht $f(p_n) \to c$. Widerspruch.

$\square$

Aus dieser Charakterisierung von Stetigkeit erhalten wir sofort einige Rechenregeln für stetige Funktionen (die wir natürlich auch direkt zeigen könnten).

Proposition. *(Rechenregeln) $D \subset \mathbb{C}$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Seien f, g stetig in p. Dann gilt:*
(a) Es ist $f + \alpha g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.
(b) Es ist $fg : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.
(c) Gilt $g(p) \neq 0$, so existiert ein $r > 0$ mit $g(q) \neq 0$ für alle $q \in U_r(p)$ und es ist $f/g : U_r(p) \cap D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.
(d) Seien $u : D \subset\!\!\longrightarrow \mathbb{C}$ und $v : E \longrightarrow \mathbb{C}$ und $p \in C$ gegeben mit $u(D) \subset E$. Ist u stetig in p und v stetig in $u(p)$, so ist $v \circ u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.

Beweis. (a) und (b) folgen direkt aus den Recheneregeln für konvergente Folgen.
(c) folgt direkt aus den Recheneregeln für konvergente Folgen, wenn man noch nutzt, daß g aufgrund der Stetigkeit in einer Kugel um p nicht verschwindet.
(d) $p_n \to p \Longrightarrow u(p_n) \to u(p) \Longrightarrow v(u(p_n) \to v(u(p))$. $\square$

Beispiel. Ist P ein Polynom d.h. $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, so ist $f(z) = P/\exp$ stetig.

Wir systematisieren jetzt die obigen Betrachtungen durch das Konzept des **Grenzwertes einer Funktion in einem Punkt**. Dabei werden wir auch Punkte zulassen, in denen die Funktionen nicht definiert ist (in deren Nähe sie aber definiert ist). Für solche Punkte ist die Frage nach Existenz von Grenzwerten gerade die Frage nach stetiger Fortsetzbarkeit der Funktion. Für Punkte, in denen die Funktion definiert ist, ist Frage nach der Existenz von Grenzewerten gerade die Frage nach Stetigkeit der Funktion.

Wir führen zunächst die Punkte ein, um die es uns geht.

Definition. *Sei $D \subset \mathbb{C}$. Ein $x \in \mathbb{C}$ heißt Berührpunkt von D, wenn es eine Folge in D gibt die gegen x konvergiert.*

Bemerkung.

- Es ist x Berührpunkt von D genau dann, wenn $D \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$ für alle $r > 0$. (Einfach)
- Es gibt zwei Typen von Berührpunkten von D: (Zeichnung)
  (1) Punkte aus D (Wähle $x_n \equiv x$.)

(2) Punke aus $\mathbb{C} \setminus D$, die von D den 'Abstand 0 haben' d.h. für die in jeder Umgebung ein Punkt von D liegt. Beispiel: $D = (a, b)$ hat die a, b.

Ende der 20. Vorlesung.

LEMMA. *(Grenzwert einer Funktion an Berührpunkt) Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Sei p ein Berührpunkt von D. Für $c \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *Für jede Folge (p_n) in D mit $p_n \to p$ gilt $f(p_n) \to c$.*
(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(q) - c| \leq \varepsilon$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$.*

Beweis. Die Aussage verallgemeinert die Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Der Beweis kann wortwörtlich von dort übernommen werden. ☐

Wieder lässt sich (ii) mittels offener Kugeln ausdrücken: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$f(U_\delta(p) \cap D) \subset U_\varepsilon(c).$$

Kurzfassung: 'Zu jeder offenen Kugel um c existiert eine offene Kugel um p, die durch f in die Kugel um c abgebildet wird.' **Zeichnung.**

DEFINITION. *(Grenzwert einer Funktion) In der Situation des Lemma, heißt c der Grenzwert von f bei p. Man schreibt $c = \lim_{x \to p} f(x)$ oder $f(x) \to c$, $x \to p$.*

Beachte. Ist $p \in D$, so muss gelten $c = f(p)$. (Wahle $x_n = p$).

Existenz des Grenzwertes in einem Punkt ist äquivalent zu Stetigkeit (falls der Punkt zum Definitionsbereicht gehört) und zu Fortsetzbarkeit zu einer im Punkt stetigen Funktion (falls der Punkt nicht zum Definitionsbereich gehört):

FOLGERUNG. *(Existenz des Grenzwertes und Stetigkeit) Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Sei p ein Berührpunkt von D. Dann gilt:*
(a) Gehört p zu D, so sind äquivalent:

(i) *Es existiert* $\lim_{x \to p} f(x)$.
(ii) *f ist stetig in $p \in D$.*

(b) Gehört p zu $\mathbb{C} \setminus D$, so sind äquivalent:

(i) *Es existiert* $\lim_{x \to p} f(x)$.
(ii) *f besitzt eine stetige Fortsetzung $\widetilde{f}$ auf $D \cup \{p\}$.*

In diesem Fall ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$\widetilde{f}(x) = f(x) \ \text{für } x \in D \text{ und } \widetilde{f}(p) = c.$$

Beweis. Das folgt sofort aus den Definitionen und dem vorangegangenen Lemma. □

Wir betrachten nun noch zwei besondere Situationen, nämlich einerseits den Fall, daß $D \subset \mathbb{R}$ ist und andererseits den Fall, daß f nur reelle Werte annimmt.

DEFINITION. *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $p \in D$ gegeben.*
(a) Ist p ein Berührpunkt von $D \cap (p, \infty)$, so nennt man, falls existent, $\lim_{q\to p} f|_{D\cap(p,\infty)}$ den rechtsseitigen Grenzwert von f in p und bezeichnet ihn auch als

$$\lim_{q\to p+} f(x).$$

(Bsp: $D = (p, \infty)$).
(b) Ist p ein Berührpunkt von $D \cap (-\infty, p)$, so nennt man, falls existent, $\lim_{q\to p} f|_{D\cap(-\infty,p)}$ den linkssseitigen Grenzwert von f in p und bezeichnet ihn auch als

$$\lim_{q\to p-} f(x).$$

(Bsp. $D = (-\infty, p)$).

Nach dem vorangehenden Lemma lautet das ausggeschrieben so: $\lim_{q\to p+} f(q) = c$:

$$\Longleftrightarrow$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(q) - c| < \varepsilon$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$ **und** $q > p$

$$\Longleftrightarrow$$

Es gilt $f(p_n) \to f(p)$ für jede Folge (p_n) in D mit $p_n \to p$ **und** $p_n > p$.

$\lim_{q\to p-} f(q) = c$: Analog (zur Übung überlassen).

Beispiele. (Existenz links- und rechtsseitiger Grenzwerte ohne Stetigkeit)

- $f = 1_{(-\infty,0]} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$. Links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren in 0; es ist f aber nicht stetig in 0. **Zeichnung.**
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x < 0$, $f(x) = 1/2$ für $x = 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$. Links und rechtsseitige Grenzwerte existieren in 1; es ist f aber nicht stetig in 0. **Zeichnung.**
- $f : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ für $x \neq 1$, $f(1) = 2$. Links und rechtsseitige Grenzwerte existieren in 1; es ist f aber nicht stetig in 1.

THEOREM. *(Charakterisierung Stetigkeit mit links- und rechtsseitigen Grenzwerten) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $p \in D$ gegeben. Dannn sind äquivalent:*

(i) *Es ist f stetig in p.*
(ii) *Es existieren $\lim_{q\to p+} f(q)$ und $\lim_{q\to p-} f(q)$ und stimmen mit $f(p)$ überein.*

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: f stetig $\Longrightarrow \lim f(p_n) = f(p)$ für JEDE Folge $(p_n) \to p$. Damit folgt (i).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt:

- $\lim_{q\to p+} f(q) = f(p) \Longrightarrow$ es existiert ein δ_+ mit $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $q > p$ mit $|q - p| < \delta_+$.
- $\lim_{q\to p-} f(q) = f(p) \Longrightarrow$ es existiert ein δ_- mit $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $q < p$ mit $|q - p| < \delta_-$.

Mit $\delta := \min\{\delta_+, \delta_-\}$ gilt dann

$$|f(p) - f(q)| < \varepsilon$$

für alle q mit $|q - p| < \delta$. □

Bemerkung. (Übung) Analog lässt sich für $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ zeigen: $\lim f(p) = c \Longleftrightarrow$ Es existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{q\to p+} f(q)$ und $\lim_{q\to p+} f(q)$ und sind gerade c.

In der betrachteten Situation gibt es noch Grenzwerte bei $\pm\infty$: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, p Berührpunkt von D. Ist $D \subset \mathbb{R}$ nach oben / oder unten unbeschränkt, und $c \in \mathbb{R}$, so definiert man
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c :\Longleftrightarrow$ Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $x \geq C$ / $c \leq C \Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to \pm\infty$ gilt $f(x_n) \to c$.

Beispiel. Betrachte $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$.

Wir kommen nun zu der Situation, daß f nur reelle Werte annimmt.

Theorem. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $p \in D$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist f stetig in p.*
(ii) *Es gilt:*
 - *Für jedes $b > f(p)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(q) < b$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$. ('f ist oberhalbstetig')*
 - *Für jedes $a < f(p)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $f(q) > a$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$. ('f ist unterhalbstetig')*

Beweis. Das ist einfach und wird zur Übung überlassen. □

In dieser Situation gibt es noch den Fall, daß der Grenzwert $\pm\infty$ ist: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, p Berührpunkt von D. Dann definiert man: $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty :\Longleftrightarrow$ Für jedes $S \in \mathbb{R}$ existiert $\delta > 0$ mit $f(x) > C$ bzw $f(x) < C$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| \leq \delta :\Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to \pm\infty$ gilt $f(x_n) \to \pm\infty$.

Beispiel. Betrachte $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$. **Zeichnung.** Dann gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty.$$

Für $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ gibt es noch einen weiteren Grenzwert: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \Longleftrightarrow$ Für alle $C \in \mathbb{R}$ existiert ein $S \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq C$ bzw. $f(x) \leq C$ feur alle $x \geq S \Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to \pm\infty$.
Entsprechend definiert man $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Wir kommen nun noch zu einer Stabilitätseigenschaft der Menge aller stetigen Funktionen auf einer Menge.

Definition. *Seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt (f_n) gleichmässig gegen f konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und $n \geq N_\varepsilon$.

Beispiele.

- Sei $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Dann konvergiert f_n gleichmässig gegen f.

  Bew. $|f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$, $n \to \infty$ (unabhängig von x!).
- Sei $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \mapsto x^n$ und $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $x < 1$ und $f(1) = 1$. Dann gilt $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in [0,1]$, f_n stetig für jedes n, aber f_n konvergieren nicht gleichmässig.

  Bew. Das kann man direkt sehen durch Untersuchen von x, die nahe an 1 liegen (**Zeichnung.**), oder aus dem folgenden Satz folgern, da f nicht stetig ist.

Theorem. *Seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Sind alle f_n stetig und konvergiert (f_n) gleichmässig gegen f, so ist auch f stetig.*

Beweis. Der Beweis wird mit einem sogenannten $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument geführt. Sei $p \in D$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

- Aufgrund der gleichmässigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(q) - f_N(q)| < \varepsilon/3$ für alle $q \in D$.
- Da f_N stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_N(q) - f_N(p)| < \varepsilon/3$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$.

Damit gilt für q mit $|q - p| < \delta$ also

$$\begin{aligned}
|f(q) - f(p)| &= |f(q) - f_N(q) + f_N(q) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \\
&\leq |f(q) - f_N(q)| + |f_N(q) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt eigentlich noch mehr, nämlich eine punktweise Aussage: Konvergiert (f_n) gleichmässig gegen f und sind alle f_n in p stetig, so ist auch f in p stetig.

KAPITEL 9

Funktionen auf Intervallen

In diesem Kapitel geht es um Funktionen

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.
Dabei untersuchen wir zunächst stetige Funktionen. Für diese Funktionen gibt es (eigentlich nur) zwei Sätze und noch einen weiteren ;-) Diese Sätze lernen wir in diesem Abschnitt kennen.
Anschliessend diskutieren wir noch eine weitere Klasse von Funktionen, nämlich die monotonen Funktionen. Für diese lässt sich Stetigkeit der Funktion und der Umkehrfunktion leicht charakterisieren.

Zeichnung. Stetigkeit mittels Intervallen.

THEOREM. *(Zwischenwertsatz) Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.* ***Zeichnung***

Beweis. Ohne Einschränkung $f(a) < f(b)$. Sei $f(a) < \gamma < f(b)$ beliebig. Zu zeigen: Es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$. Beginnend mit $[a_1, b_1] = [a, b]$ konstruieren wir induktiv durch Halbierung der Intervalle eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit

- $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$
- $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^{n-1}}|b - a|$.

Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren dann gegen den (eindeutigen) Punkt

$$c \in \bigcap [a_n, b_n].$$

Aufgrund der (Folgen) Stetigkeit gilt:

$$f(c) = \lim f(a_n) \leq \gamma \;\; f(c) = \lim f(b_n) \geq \gamma.$$

Das beendet den Beweis. □

Ende der 21. Vorlesung.

Wir geben jetzt noch eine Umformulierung des Satzes.

THEOREM. *(Zwischenwertsatz - Variante) Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $J := f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Genaür gilt*

$$(\inf f(I), \sup f(I)) \subset J \subset [\inf f(I), \sup f(I)]$$

falls $\inf f(I)$ *und* $\sup f(I)$ *endlich sind.*

Beweis. Ohne Einschränkung seien $\inf f(I)$ und $\sup f(I)$ endlich.
Zweite Inklusion: klar.
Erste Inklusion: Reicht für jedes $\varepsilon > 0$ zu zeigen, daß gilt

$$(\inf f(I) + \varepsilon, \sup f(I) - \varepsilon) \subset f(I).$$

Wähle dazu $a \in I$ mit $f(a) < \inf f(I) + \varepsilon$ und $b \in I$ mit $f(b) > \sup f(I) - \varepsilon$. Nach dem Zwischenwertsatz gilt dann $[f(a), f(b)] \subset f(I)$.
□

Bemerkung.

- Aus der Variante folgt der Zwischenwertsatz (und umgekehrt).
- Ist I ein offenes Intervall, so kann man über Offenheit / Abgeschlossenheit von $f(I)$ im allgemeinen keine Aussage treffen: (Identität auf $(0,1)$; Hut auf $(0,1)$). Im Falle von abgeschlossenen Intervallen ist die Lage anders. Das werden wir gleich untersuchen.

Offenbar impliziert der Zwischenwertsatz die folgende Aussage.

FOLGERUNG. *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(a) \leq 0 \leq f(b)$, so hat f in $[a,b]$ eine Nullstelle.* ***Zeichnung***

Anwendung - Existenz der Wurzel. Ist $\alpha > 0$ so hat $P : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, P(x) = x^n - \alpha$ ein Nullstelle.
Bew. $P(0) = -\alpha < 0$ und $P(1+\alpha) > \alpha$ (nach Bernoulli-Ungleichung). Anwendung des Zwischenwertsatzes auf die Einschränkung von P auf $[0, 1+\alpha]$ liefert dann die Behauptung.

Anwendung- Fixpunkt von Selbstabbildungen Jede stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ hat einen Fixpunkt (d.h. es gibt ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = c$). **Zeichnung**
Bew. Betrachte

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; g(x) = f(x) - x.$$

Dann gilt (wegen $f([a,b]) \subset [a,b]$) aber

$$g(a) = f(a) - a \geq 0, \;\; g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt Existenz eines c mit $g(c) = 0$ d.h. $f(c) = c$.

Wir kommen nun zum anderen Satz über stetige Funktionen auf Intervallen.

THEOREM. *(Existenz Minimum und Maximum stetiger Funktionen auf abg. beschränkten Intevall) Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an, d.h. es gibt p_m und p_M in $[a,b]$ mit*

$$f(p_m) \leq f(p) \leq f(p_M)$$

für alle $p \in [a,b]$.

Bemerkung. Es ist nötig, daß I ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall ist (vgl. id auf $(0,1)$ oder exp auf $\mathbb{R}$).

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage zum Maximum. Die Aussage zum Minimum kann ähnlich bewiesen werden.

Sei $M := \sup f(I)$. Sei (p_n) eine Folge in $[a,b]$ mit $f(p_n) \to M$.

- Da $[a,b]$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano/Weierstrass eine konvergente Teilfolge (p_{n_k}) von (p_n).
- Da $[a,b]$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert p der konvergenten Teilfolge (p_{n_k}) wieder zu $[a,b]$.

Es gilt also
$$p_{n_k} \to p \in [a,b].$$
Da f in p stetig ist, folgt dann
$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) = M.$$
Das beendet den Beweis. □

Nach diesen beiden Sätzen kommen wir nun zum dritten Satz über stetige Funktionen auf Intervallen.

Theorem. *(Gleichmässige Stetigkeit von stetigen Funktionen auf abgeschlossenen beschraänkten Intervall) Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmässig stetig.*

Beweis. Angenommen Nein! Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ 'ohne δ' d.h. mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in [a,b]$ existieren mit
$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$
Durch übergang zu einer Teilfolge können wir ohne Einschränkung annehmen, daß
$$x_n \to x \in [a,b].$$
Wegen $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ gilt dann auch $y_n \to x \in [a,b]$. Damit folgt
$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(x_n) - f(y_n)| \\ &= |f(x_n) - f(x) + f(x) - f(y_n)| \\ &\leq |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(y_n)| \\ &\to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$
Widerspruch. □

Bemerkung. Für die beiden vorangegangenen Schlüsse ist die entscheidende Eigenschaft der abgeschlossenen beschränkten Intervalle I die folgende:

(K) Jede Folge mit Werten in I hat eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder in I liegt.

Die Schlüsse gelten für jede andere Menge I mit dieser Eigenschaft ebenfalls (Check!). Solche Mengen heissen kompakt (s.u.).
Wir kommen nun zu monotonen Funktionen auf Intervallen.

Definition. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f monoton wachsend/fallend, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt*

$$f(x) \leq f(y) \ \ /f(x) \geq f(y).$$

Gilt eine strikte Ungleichung, so heißt f streng oder strikt monoton wachsend/fallend.

Beispiele.

- Die k-te Potenz auf $[0, \infty)$ d.h. die Funktion $(\cdot)^k : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), x \mapsto x^k$ ist streng monoton.
  Bew. $y > x$ impliziert $y = x + h$ mit $h > 0$. Damit folgt Aussage aus binomischem Satz:
- Die k-te Wurzel $\sqrt{k} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ ist streng monoton wachsend.
  Bew. Das wissen wir schon.
- Auf $\mathbb{R}$ ist die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ streng monoton wachsend.
  Bew. Das folgt mit der Funktionalgleichung: $y > x$ impliziert $y = x + h$ mit $h > 0$. Damit folgt
  $$\exp(y) = \exp(x + h) = \exp(x) \exp(h) > \exp(x)$$
  da für $h > 0$ gilt $\exp(h) = 1 + ... > 1$.

Lemma. *(Hauptlemma monotone Funktionen) Sei $-\infty < a \leq b < \infty$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann existieren in jedem Punkt $c \in [a, b]$ die halbseitigen Grenzwerte $f(c_+) := \lim_{x \to c+} f(x)$ und $f(c_-) := \lim_{x \to c-} f(x)$ und es gilt $f(c_-) \leq f(c) \leq f(c+)$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend. Wir zeigen nur die Aussage zum Grenzwert von links. Die andere Aussage folgt analog. Es ist $\{f(x) : x < c\}$ durch $f(c)$ nach oben beschränkt und besitzt daher ein Supremum M. Wir zeigen $\lim_{x \to c-} f(x) = M$.
Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $x_\varepsilon < c$ mit $M - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon) \leq M$. Setzt man $\delta := c - x_\varepsilon$, so gilt dann also für alle $x < c$ mit $|x - c| < \delta$ auch $x_\varepsilon < x < c$. **Zeichnung.** Damit gilt für solche x dann aufgrund der Monotonie

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq M$$

also $|f(x) - M| < \varepsilon$. □

Theorem. *(Stetigkeitseigenschaft monotoner Funktionen) Sei $-\infty < a \leq b < \infty$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f in einem Punkt $c \in [a, b]$ entweder stetig, oder hat dort eine Sprungstelle (d.h. es existiert $s > 0$ mit $f(y) - f(x) \geq s$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x < c < y$). Genaür gibt es vier Typen von Verhalten:* ***Zeichnung.***

- *Es gilt* $f(c_-) = f(c_+)$. *Dann ist* f *stetig.*
- *Es gilt* $f(c_-) = f(c)$ *und* $f(c) < f(c_+)$ *und* f *ist unstetig.*
- *Es gilt* $f(c_-) < f(c) = f(c_+)$ *und* f *ist unstetig.*
- *Es gilt* $f(c_-) < f(c) < f(c_+)$ *und* f *ist unstetig.*

Ende 22. Vorlesung

FOLGERUNG. *Sei* I *ein Intervall in* $\mathbb{R}$ *und* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *monoton. Dann ist* f *genau dann stetig, wenn* $f(I)$ *ein Intervall ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Das folgt aus dem Zwischenwertsatz (und hat nichts mit Monotonie zu tun).
$\Longleftarrow$: Wenn $f(I)$ ein Intervall ist, kann f keine Sprungstelle haben. Damit folgt aus dem vorigen Korollar die Stetigkeit von f. □

Wir untersuchen nun Stetigkeit von Umkehrfunktionen monotoner Funktionen: Ist $D \subset \mathbb{R}$ und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng monoton, so ist f injektiv (klar...). Also existiert die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } g(y) = x$$

für $x \in I$ mit $f(x) = y$. Geometrisch entsteht die Umkehrfunktion durch Spiegeln an der Winkelhalbierenden. **Zeichnung** Ist f streng monoton wachsend/fallend, so ist auch g streng monoton wachsend/fallend. (Bew. Ohne Einschränkung f streng monoton wachsend. Sei $y < y'$ und x, x' mit $f(x) = y$, $f(x') = y'$. Dann gilt also $x \neq x'$. Wäre $x > x'$, so folgte $y = f(x) > f(x') = y'$. Widerspruch.)

Beispiel. $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$. Dann ist f streng monoton wachsend mit $f([0, \infty) = [0, \infty)$ und die Umkehrfunktion $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $g(y) = \sqrt[k]{y}$.

THEOREM. *(Umkehrfunktion stetiger streng monotoner Funktionen ist stetig) Sei* I *eine Intervall in* $\mathbb{R}$ *und* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und streng monoton. Dann ist* $f(I)$ *ein Intervall und die Umkehrfunktion* $g = f^{-1} : f(I) \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis. Es ist g streng monoton. Wegen $g(f(I)) = I$ hat g keine Sprungstellen. Also ist g stetig. □

Bemerkung.

- Aussage und Beweis bleiben auch ohne die Voraussetzung der Stetigkeit an f gültig. (Check!). Allerdings ist $f(I)$ kein Intervall, wenn f nicht stetig ist.
- (Übung) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$f \text{ invertierbar} \Longleftrightarrow f \text{ streng monoton.}$$

  (Ist I kein Intervall, so gilt diese äquivalenz nicht.)

Beispiel. Sei $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann ist exp streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ und die Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. **Zeichnung.**
Bew. Es reicht zu zeigen, daß $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gilt: Wir wissen schon

$$\exp(x)^{-1} = \exp(-x) \ \text{ und } \ \exp(x) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt offenbar für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\exp(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \geq k$$

und damit also auch

$$\exp(-k) < \frac{1}{k}.$$

Also enthält (nach Zwischenwertsatz) $\exp(\mathbb{R})$ das Intervall $[1/k, k]$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist, folgt die gewünschte Behauptung.

Der Logarithmus wird uns immer wieder begegenen (wie auch die Exponentialfunktion). Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion führt zur Gültigkeit der folgenden Gleichung

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \ \text{ und } \ \ln x = -\ln \frac{1}{x}$$

für $x, y > 0$.
Bew. $x = e^a$, $y = e^b$. Dann gilt

$$\ln x + \ln y = \ln e^a + \ln e^b = a + b = \ln(e^{a+b}) = \ln(xy).$$

Auch Monotonie ist stabil unter Konvergenz von Funktionen und zwar sogar unter punktweiser Konvergenz.

Proposition. *Sei I eine Intervall und $f_n :\longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seinen monotone wachsende Funktionen. Gibt es ein $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in I$, so ist f ebenfalls monoton wachsend. Entsprechendes gilt für monoton fallende Funktionen.*

Beweis. Sei $x < y$. Dann gilt

$$f(x) = \lim f_n(x) \leq \lim f_n(y) = f(y).$$

□

Man könnte denken, daß Funktionen auf einem Intervall, die stetig und monoton sind, besonders einfach sind. Das ist nicht der Fall, wie man an folgendem Beispiel sieht.

Beispiel - Teufelstreppe. Sei $I = [0, 1]$.
Setze $C_0 := I$ und konstruiere rekursiv durch Herausnehmen der offenen mittleren Drittelintervalle abgeschlossene Mengen $C_n \subset I$ mit

$C_n \subset C_{n-1}$. **Zeichnung.** Damit besteht also C_n aus 2^n Intervallen der Länge $1/3^n$. Die 'Gesamtlänge' von C_n ist damit

$$L_n = \frac{1}{3^n} 2^n$$

und die 'Gesamtlänge' des Komplementes $I \setminus C_n$ ist gegeben durch

$$L_n = 1 - \frac{1}{3^n} 2^n.$$

Sei

$$C := \bigcap_{n=1} C_n.$$

Dann ist die 'Gesamtlänge' des Komplementes $I \setminus C$ also gerade 1 und C hat die 'Länge' 0. Nun definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n : I \longrightarrow [0,1]$$

auf folgende Weise: **Zeichnung**

- $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.
- Auf den herausgenommenen $2^n - 1$ ($= 1 + 2 + \cdot + 2^{n-1}$) Intervallen ist die Funktion konstant mit den Werten $1/2^n, 2/2^n, \ldots, (2^n - 1)/2^n$.
- Auf den noch verbliebenen Intervallen wird die Funktion linear interpoliert.

Dann gilt offenbar $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/2^n$ für $m \geq n$. Damit ist für jedes $x \in I$ also $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent und für die Grenzwert $f(x)$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Damit konvergiert (f_n) also gleichmässig gegen f und f ist stetig und monoton mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ und f konstant auf den einzelnen Stucken von $I \setminus C$. Diese Funktion kann also nicht gezeichnet werden.

Bemerkung.

- In gewissen Weise sind Funktionen wie obige die typischen stetigen monotonen Funktionen.
- Unsere Anschauung vom Zeichnen von Funktionen ist insofern irreführend, als wir (eigentlich) nur Funktionen zeichnen können, die - von wenigen Ausnahmepunkten abgesehen- lokal lipschitzstetig sind.
- Im nächsten Abschnitt werden wir differenzierbare Funktionen kennenlernen. Für diese Klasse 'gelten' unsere Zeichnungen.

KAPITEL 10

Differenzierbare Funktionen

Eine Funktion ist in einem Punkt differenzierbar, wenn sie in der Nähe des Punktes gut durch eine linear affine Funktion, ihre Tangente, approximiert wird. Die zugehörige lineare Funktion (gegeben durch eine 1×1 Matrix d.h. eine Zahl) heißt die Abbleitung.
Um über 'Nähe' eines Punktes sprechen zu können, brauchen wir Platz. Daher wird es sich meist um Funktionen auf offenen Intervalle handeln. 'Gute Approximation' wird bedeuten, daß der 'Fehler' klein ist. Differenzierbare Funktionen haben viele gute Eigenschaften. Im wesentlichen lieferten unsere Zeichnungen meist differenzierbare Funktionen.

1. Definition und grundlegende Eigenschaften von Differenzierbarkeit in einem Punkt.

Idee. Gegeben $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \in (a, b)$:

- f stetig in $p : f(q) = f(p) + \psi(q)$, wobei der Fehler $\psi(q)$ klein wird für $q \to p$, d.h. f ist gut durch eine konstante Funktion approximierbar in p.
- f differenzierbar in p: $f(q) = f(p) + b(q - p) + \varphi(q)$, wobei der Fehler $\phi(q)$ sehr klein wird für $q \to p$, naemlich $\varphi(q) = \psi(q)(q - p)$ mit $\psi(q) \to 0$, $q \to p$. Damit is f in p gut durch eine lineare Funktion - die Tangente $T(x) = b + c(x - p)$ approximierbar.

Lemma. *(Charakterisierung der Differenzierbarkeit in einer Dimension) Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei $p \in I$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = f(p) + b(x - p) + \varphi(x),$$

wobei für $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to p, x \neq p} \frac{\varphi(x)}{|x - p|} = 0.$$

(ii) *Der Grenzwert $\lim_{x \to p, x \neq p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ existiert.*

In diesem Fall gilt $b = \lim_{x \to p, x \neq p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Es gilt

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = b + \frac{\varphi(x)}{x-p} \to b, x \to p.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Setze $b := \lim_{x\to p, x\neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Dann erfüllt φ mit

$$f(x) = f(p) + c(x-p) + \varphi(x)$$

also

$$\frac{\varphi(x)}{(x-p)} = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - b \to 0, x \to p.$$

Weitere Aussage: Schon gezeigt in $(ii) \Longrightarrow (i)$. □

DEFINITION. *Sei $f : (a,b) \longrightarrow$ gegegen. Falls die Bedingungen des Lemma in $p \in (a,b)$ erfüllt sind, so heißt f in p differenzierbar und man nennt den Grenzwert*

$$\lim_{x\to p, x\neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

die Ableitung von f an der Stelle p und bezeichnet ihn mit $Df(p)$ oder $f^{'}(p)$. Ist f in allen Punkten von (a,b) differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

Bemerkung. Betrachtet man den Quotienten

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$

für $q \to p$, so fällt auf, daß der Nenner gegen Null konvergiert. Damit der Quotient endlich bleibt und gegen einen Grenzwert strebt, muss also der Zähler auch gegen Null streben und zwar im wesentlichen im 'gleichen Masse'. Damit folgt aus Differenzierbarkeit also Stetigkeit.

PROPOSITION. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $p \in I$. Dann ist f stetig in p.*

Beweis. Es gilt

$$f(q) = f(p) + b(q-p) + \varphi(q)$$

mit $\varphi(q) = 0$ für $q = 0$ und $\varphi(q) = \frac{\varphi(q)}{q-p}(q-p)$ für $q \neq p$. Damit gilt also $\varphi(q) \to 0$ für $q \to p$ und es folgt (durch Betrachten der drei Terme in der Gleichung) $f(q) \to f(p)$ für $q \to p$ d.h. Stetigkeit von f in p. □

Ende der 23. Vorlesung

Wir kommentieren diese Definition mit einer Reihe von wichtigen Bemerkungen:

Geometrische Deutung.

- Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ ist gerade die Steigung der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(p, f(p))$. **Zeichnung.**

- Der Differentialquotient $f'(p) = \lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ ist die Steigung der Tangenten an den Graphen von f im Punkt $(p, f(p))$. **Zeichnung.**
- Die Tangente durch $(p, f(p))$ ist gegeben durch die Gerade
$$T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$$
Das ist gerade die lineare Approximation.
- Es gilt
$$\lim_{x\to p, x\neq p} \frac{\varphi(x)}{|x-p|} = 0$$
genau dann, wenn gilt
$$\varphi(x) = \psi(x)(x-p)$$
mit $\psi(x) \to 0$ für $x \to p$, naemlich
$$\psi(x) := \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x-p} & : \; x \neq p \\ 0 & : \; x = p. \end{cases}$$
- Es ist
$$\lim_{x\to p, x\neq p} \frac{\varphi(x)}{|x-p|} = 0$$
eine präzise Fassung, der Aussage, daß der Fehler bei der Approximation durch die Tangente sehr klein ist.

Hinweis: Ausrechnen des Grenzwertes. Es gilt
$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}.$$

Wir kommen nun zu einigen Rechenregeln im Umgang mit Ableitungen.

Proposition. *(Rechenregeln) Sei $-\infty < a < b < \infty$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $p \in (a,b)$. Dann gilt:*

(a) *$f + \alpha g$ ist differenzierbar in p mit $(f+\alpha g)'(p) = f'(p) + \alpha g'(p)$.*
(b) *(Produktregel) Das Produkt fg ist differenzierbar in p mit $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$.*
(c) *(Quotientenregel) $g(p) \neq 0$, so ist auch f/g differenzierbar in p mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{g^2(p)}$. Insbesondere gilt $(1/g)'(p) = -g'(p)/g^2(p)$.*

Beweis. (a) Einfach.
(b) $\frac{f(x)g(x)-f(p)g(p)}{x-p} = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} g(x) + f(p)\frac{g(x)-g(p)}{x-p}$. Nun $x \to p$...
(c) Es reicht das 'Insbesondere' zu zeigen. (Dann folgt erste Aussage durch Anwenden der Produktregel.) Es gilt
$$\frac{1/g(x) - 1/g(p)}{x-p} = -\frac{g(p)-g(x)}{x-p}\frac{1}{g(x)g(p)}.$$

Nun $x \to p$.... $\square$

PROPOSITION. *(Kettenregel) Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ gegeben. Ist g differenzierbar in p und f differenzierbar in $g(p)$, so ist $f \circ g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p, und es gilt $(f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p)$.*

Beweis. Die Idee ist klar:

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(p)}{x - p} = \frac{f \circ g(x) - f \circ g(p)}{g(x) - g(p)} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \to f'(g(p))g'(p).$$

Da $g(x) - g(p) = 0$ möglich ist, muss man etwas genaür sein. Man ersetzt dazu für $g(x) = g(p)$ den Quotienten $f(g(x)) - f(g(p))/g(x) - g(p)$ durch $f'(g(p))$. Genaür:
Setze $y_0 := g(p)$ und definiere (wobei $\eta = g(x)$ sein wird)

$$f^*(\eta) = \begin{cases} \frac{f(\eta) - f(y_0)}{\eta - y_0}, & : \ \eta \neq y_0 \\ f'(y_0) & : \ \eta = y_0 \end{cases}$$

Dann gilt

- $\lim_{\eta \to y_0} f^*(\eta) = f'(y_0) = f^*(y_0)$.
- $f(\eta) - f(y_0) = f^*(\eta)(\eta - y_0)$ für **alle** η.

Damit können wir nun mit $\eta = g(x)$ schliessen

$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(p)}{x - p} = \frac{f(\eta) - f(y_0)}{x - p} = f^*(\eta) \frac{g(x) - g(p)}{x - p}.$$

Nun folgt die Behauptung leicht. $\square$

Beispiele.

- Die konstante Funktion hat Ableitung 0.
  Bew. klar.
- (Potenz) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$ hat die Ableitung $f'(x) = kx^{k-1}$.
  Bew. $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{x^k - p^k}{x-p} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j p^{k-1-j} \to kp^{k-1}$.
- (Polynom) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ hat Ableitung $\sum_{j=1}^{n} a_j j x^{j-1}$.
  Bew. Linearkombination von Potenzen.
- (Inverse Potenz) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^k$ hat Ableitung $f'(x) = -k \frac{1}{x^{k+1}}$.
  Bew. Quotientenregel liefert $f'(x) = -\frac{kx^{k-1}}{x^{2k}}$.
- (Exponentialfunktion): Es gilt für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z \to z_0, z \neq z_0} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0).$$

  Insbesondere hat die Funktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp x$ die Ableitung $\exp(x)$.

Bew. Aufgrund der Funktionalgleichung gilt

$$\frac{\exp(z)-\exp(z_0)}{z-z_0} = \exp(z_0)\frac{\exp(z-z_0)-1}{z-z_0}.$$

Daher reicht es $\lim_{h\to 0}\frac{\exp(h)-1}{h-0} = 1$ zu zeigen. Dazu:

$$\begin{aligned}\frac{\exp(h)-1}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}-1\right)\\ &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}\\ &= 1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}\\ &= 1+h\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-2}}{k!}.\end{aligned}$$

Für $|h|<1$ gilt $|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-2}}{k!}| \le \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} \le \exp(1)$. Damit folgt

$$\frac{\exp(h)-1}{h}\to 1,\quad h\to 0.$$

- Für die Funktionen $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\sin(x)=\Im\exp(ix)$ und $\cos:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $\cos(x)=\Re(\exp(ix)$ sind differenzierbar mit $\sin'=\cos$ und $\cos'=-\sin$. Insbesondere gilt $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

  Bemerkung (Beschreibung von $\sin$ **und** $\cos$ **am Einheitskreis)**: Eine kleine Rechnung zeigt, daß für $u=\exp(ix)$ gilt $|u|=1$. Damit handelt es sich also bei sin und cos in der Tat um die Verhältnisse der Seiten eines rechtwinklichen Dreiecks am Einheitskreis. **Zeichnung.**

  Bew. Wir betrachten nur sin. (Der andere Fall kann analog behandelt werden.)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)-\sin(p)}{x-p} &= \Im\frac{\exp(ix)-\exp(ip)}{x-p}\\ &= \Im i\frac{\exp(ix)-\exp(ip)}{ix-ip}\\ &= \Re\frac{\exp(ix)-\exp(ip)}{ix-ip}\\ &\to \Re\exp(ip)=\cos(p).\end{aligned}$$

Zum 'Insbesondere':

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - 0}{x-0} = \frac{\sin x-\sin 0}{x-0}\to \sin'(0)=\cos(0)=1.$$

Potenzreihe. Sei (a_n) Folge in $\mathbb{C}$ mit $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ und $R := \frac{1}{\rho}$ und

$$f : U_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dann gilt

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} \to \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Sind die a_n, $n \in \mathbb{N}$ alle reell, so ist die Einschränkung von f auf $(-R, R)$ differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Beachte. Es handelt sich bei der Ableitung um die durch formale Differentiation der Summanden gewonnene Funktion. Das Problem besteht darin, die Vertauschung von Summenbildung und Ableitung zu begründen. Wie üblich verlangt diese Vertauschung von Grenzwerten Arbeit!

Bew. Man sieht leicht $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}$. Insbesondere ist

$$g : U_R(0) \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

wohldefiniert durch eine absolut konvergente Reihe. Wir betrachten nun

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n - w^n) = (z - w) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k} \right).$$

Damit folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\tfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & -g(w) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k-1} \right)) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} \\
= & \sum_{n=1}^{N} a_n (\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k-1}) - n w^{n-1}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k-1} \right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n w^{n-1}.
\end{aligned}$$

Sei $S > 0$ mit $|w| < S < R$ beliebig. Ist z so nahe an w, daß auch $|z| < S$ gilt, so kann man die jede einzelnde der beiden letzten Summen im Betrag abschätzen durch

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| S^{n-1}.$$

Dieser Term geht für $N \to \infty$ gegen 0. Ausserdem geht bei festem N aber der erste Term für $z \to w$ gegen 0. Damit folgt die gewünschte Konvergenz

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| \to 0$$

auf folgende Weise: Wähle zu beliebigem $\varepsilon > 0$ zunächst $N \in \mathbb{N}$ so gross, daß die obigen beiden letzten Terme kleiner als $\varepsilon/3$ sind für $|z| < S$. Wähle anschliessend $\delta > 0$ so klein, daß für $|z - w| < \delta$ sowohl $|z| < S$ also auch

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-k-1}) - nw^{n-1})\right| < \varepsilon/3$$

gilt. (Das ist möglich, da es sich um eine endliche Summe stetiger Funktionen handelt).

PROPOSITION. *(Ableitung der Umkehrfunktion) Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton, stetig und differenzierbar in p mit $f'(p) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g := f^{-1} : f(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = f(p)$, und es gilt*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Beweis. Sei $y = f(x)$, $y_0 = f(p)$, also $x = g(y)$, $p = g(y_0)$. Dann folgt $x \to p$ aus $y \to y_0$. Damit erhält man

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - p}{f(x) - f(p)} \to \frac{1}{f'(p)}$$

für $x \to p$. □

Zeichnung. Spiegeln

Bemerkung. Die Vorraussetzung $f'(p) \neq 0$ ist nötig, andernfalls hat man eine waagrechte Tangente. (**Beispiel.** Quadrat und Wurzel bei 0).

Beispiele (Umkehrfunktion)

- $k - te$ **Wurzel als Umkehrfunktion:** Die Funktion $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt[k]{y} = y^{1/k}$ ist differenzierbar mit Ableitung $g'(y) = \frac{1}{k} y^{1/k-1}$.

  Bew. Es ist g Umkehrfunktion von $f(x) = x^k$. Damit gilt mit $y = f(x)$, $x = g(y) = y^{1/k}$ also

  $$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{kx^{k-1}} = \frac{1}{k}\frac{1}{y^{(k-1)/k}}.$$

Ende der 24. Vorlesung

- **Der Logarithmus als Umkehrfunktion:** Die Funktion $\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \ln y$ ist differenzierbar mit $\ln'(y) = 1/y$.

  Bew. ln ist Umkehrfunktion von exp. Damit gilt mit $y = \exp(x)$, $x = \ln y$ also

  $$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}.$$

Nachdem wir nun den Logarithmus kennen, können wir noch die allgemeine Potenz einführen und auf Differenzierbarkeit untersuchen.

Beispiel. (Allgemeine Potenz) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ definiert man

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$$

und nennt dies die α-te Potenz von x. Dann folgt sofort

$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x.$$

Es ist

$$P_\alpha : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty), P_\alpha(x) = x^\alpha$$

differenzierbar mit

$$P_\alpha^{'}(x) = \alpha P_{\alpha-1}(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Zeichnung. (für $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha$).
Bew. Nach Kettenregel gilt

$$P_\alpha^{'}(x) = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{e^{\ln x}} = e^{(\alpha-1) \ln x} \alpha.$$

Für $a > 0$ ist

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty), \; x \mapsto a^x$$

differenzierbar mit

$$\exp_a^{'}(x) = \ln a \exp_a(x).$$

Bew. Es gilt $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$. Damit folgt die Behauptung sofort aus der Kettenregel.

Für die allgemeine Potenz gilt:

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \text{ sowie } x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$$

Bew. Erste Aussage folgt direkt aus der Definition:

$$x^\alpha x^\beta = e^{\alpha \ln x} e^{\beta \ln x} = e^{(\alpha+\beta) \ln x} = x^{\alpha+\beta}.$$

Zweite Aussage folgt mit

$$x^\alpha x^\beta = e^{\alpha \ln x} e^{\alpha \ln y} = e^{\alpha(\ln x + \ln y)} = e^{\alpha \ln(xy}.$$

(Nutzt Rechenregel $\ln(xy) = \ln x + \ln y$): Bew. $x = e^a$, $y = e^b$. Dann gilt

$$\ln x + \ln y = \ln e^a + \ln e^b = a + b = \ln(e^{a+b}) = \ln(xy).)$$

Beachte. Für $k \in \mathbb{Z}$ haben wir nun x^k und $x^{1/k}$ auf zwei Arten definiert. Man kann sich aber leicht überlegen, daß beide Arten übereinstimmen:
Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $P_k(x) = e^{k \ln x} = e^{\ln x} \ldots e^{\ln x} = x^k$. Ebenso gilt für $y := e^{\frac{1}{k} \ln x}$ offenbar $y > 0$ sowie $y^k = \ldots = e^{\ln x} = x$. Damit gilt also $y = x^{1/k}$.

Beispiel - nichtdifferenzierbare Funktion

- Die Funktion $\text{abs} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist in $x \neq 0$ differenzierbar und in $x = 0$ nicht differenzierbar. (Dort existieren die links und rechtsseitigen Ableitungen und sind verschieden).
Zeichnung.
Bew. Für $p > 0$ gilt $\frac{\text{abs}(x) - \text{abs}(p)}{x-p} = \frac{x-p}{x-p} = 1 \to 1$, $x \to p$.
Für $p < 0$ gilt $\frac{\text{abs}(x) - \text{abs}(p)}{x-p} = \frac{-x-(-p)}{x-p} = -1 \to -1$, $x \to p$.
Für $p = 0$ gilt $\frac{\text{abs}(x) - \text{abs}(p)}{x-p} = |x|/x = \pm 1$ für $x > 0$ bzw. $x < 0$. Damit existiert die Ableitung nicht.
- Die Funktion $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = 0$ falls x rational ist und $u(x) = x^2$ falls x irrational ist, ist in allen $x \neq 0$ unstetig also nicht differenzierbar und in $x = 0$ differenzierbar mit Ableitung Null. (Übung).

Definition. *Ist $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so heißt f stetig differenzierbar.*

Bemerkung. Unter Umständen ist es praktisch auch die Ableitungen in Randpunkten bilden zu können. Dazu definiert man (falls existiert) für $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

und

$$f'(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

2. Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

In diesem Abschnitt wollen wir differenzierbare Funktionen auf Intervallen detaillierter behandeln. Wir werden sehen, daß die Ableitung wichtige Informationen über Monotonie und Extremwerte von Funktionen kodiert. Eine wesentliche Rolle in den Betrachtungen spielt der Mittelwertsatz. Konkret betrachten wir Funktionen

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

und nehmen meist an:

- f stetig auf $[a, b]$
- f differenzierbar in (a, b)

Definition (Lokale Extrema). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben.*

- *Es hat f in $\xi \in I$ ein lokales $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$ wenn ein $\delta > 0$ existiert mit $\substack{f(x) \leq f(\xi) \\ f(x) \geq f(\xi)}$, für alle $x \in I$ mit $|x - \xi| < \delta$.*
- *Gilt $\substack{f(x) \leq f(\xi) \\ f(x) \geq f(\xi)}$ für alle $x \in I$, so hat f in ξ ein globalen $\substack{\text{Maximum} \\ \text{Minimum}}$.*

Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt für $x \neq \xi$, so spricht man von einem strikten $\frac{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$. Maxima und Minima werden auch als Extrema bezeichnet.

THEOREM (Notwendige Bedingung für lokale Extrema). *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Hat f in $\xi \in (a,b)$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(\xi) = 0$.* ***Zeichnung.***

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, daß f in ξ ein lokales Maximum besitzt (für Minimum ist der Beweis analog).
Für $x > \xi$ und x nahe an ξ gilt: $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$. Damit folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

Für $x < \xi$ und x nahe an ξ gilt: $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$. Damit folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

Damit ergibt sich insgesamt $f'(\xi) = 0$. □

Bemerkung zu Chancen und Schwächen des vorigen Satzes.

- Es handelt sich um eine notwendige Bedingung, aber keine hinreichende Bedingung, wie das Beispiel $f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ in $\xi = 0$ zeigt.
- Eine differenzierbare Funktion muss auf (a,b) kein Extremum haben (siehe etwa $f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x$).
- Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ muss Minimum und Maximum annehmen (s.o.). Allerdings könnten diese Extrema am Rand liegen.
- Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b) und liegen die Extrema nicht am Rand, so werden sie (sowie möglicherweise weitere Punkte) durch Lösen der Gleichung $f^{'}(\xi) = 0$ gefunden.

THEOREM (Rolle). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b) mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Zeichnung.
Beweis. Idee: In Extrema verschwindet die Ableitung.

f ist stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$. Daher nimmt f ein Minimum und ein Maximum an.
Fall 1: Es ist f konstant $= 0$. Dann kann man jedes $\xi \in (a,b)$ wählen.
Fall 2: Es ist f nicht konstant. Sei $c := f(a) = f(b)$. Dann gilt $\min f \neq c$ oder $\max f \neq c$. Sei o.E. $\max f \neq c$ und sei $\xi \in (a,b)$ ein Punkt in dem f das Maximum annimmt. Dann gilt aber $f'(\xi) = 0$. □

Theorem (Mittelwertsatz). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b). Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zeichnung.

Beweis. Idee: Ziehe von f die Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ab **Zeichnung**: Betrachte

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \ F(x) = f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)}_{\text{Gerade durch } (a, f(a)), (b, f(b))}.$$

Dann ist F stetig und differenzierbar auf (a, b) und es gilt $F(a) = 0 = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle existiert daher ein $\xi \in (a, b)$ mit $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Theorem (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Beachte. Das kann man (wenn entsprechende Terme nicht verschwinden) auch so schreiben:

$$\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(a)-g(b)}{(b-a)}} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

In diesem Sinne handelt es sich um eine 'simultane' Mittelwertbildung.

Beweis. Betrachte

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$

Damit ist F stetig, differenzierbar auf (a, b) und $F(a) = 0, \ F(b) = 0$. Der Satz von Rolle liefert $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = F'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkungen. Es sind Mittelwertsatz, Satz von Rolle und verallgemeinerter Mittelwertsatz äquivalent in folgendem Sinne:

- Aus dem Satz von Rolle folgt die Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (siehe Beweis).
- Aus der Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes folgt der Mittelwertsatz mit $f = f$ und $g = \mathrm{id}$.
- Aus dem Mittelwertsatz folgt der Satz von Rolle (Klar.)

Theorem (Charakterisierung von Monotonie mittels Ableitungen). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:*

(a) *f konstant* $\Leftrightarrow$ $f' \equiv 0$ *auf* (a, b)
(b) *f monoton* $\substack{wachsend \\ fallend}$ $\Leftrightarrow$ $\substack{f' \geq 0 \\ f' \leq 0}$ *auf* (a, b)
(c) $\substack{f' > 0 \\ f' < 0}$ $\Rightarrow$ *f ist strikt* $\substack{wachsend \\ fallend}$

Beweis. (a) Das folgt sofort aus (b). (Übung: Direkter Beweis.)

(b) Wir zeigen zunächst $\Longrightarrow$: Wir behandeln nur monoton wachsendes f. (Der andere Fall kann analog behandelt werden). Für $\xi \in (a, b)$ und $x \neq \xi$ gilt aufgrund der Monotonie dann

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0.$$

Damit folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

Wir zeigen nun $\Longleftarrow$: Seien $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$. Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0$$

und damit

$$f(y) - f(x) \geq 0.$$

(c) Wir betrachten nur $f' > 0$. (Der andere Fall kann analog behandelt werden). Sei $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0$$

also

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Die Umkehrung in c) gilt nicht. Betrachte dazu $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ in 0.

Ende der 25. Vorlesung.

Folgerung (Ableitung bestimmt Funktion bis auf eine Konstante). *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f' = g'$. Dann ist $f - g$ konstant. Gibt es in diesem Fall ein c mit $f(c) = g(c)$, so folgt $f = g$.*

Beweis. Setze $h := f - g$. Dann gilt $h' = f' - g' = 0$ auf (a, b) und nach obigem Satz ist $h =$const. □

Nachdem wir nun die erste Ableitung untersucht haben, wollen wir sehen, was man aus der zweiten Ableitung lernen kann.

DEFINITION. *Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar, so heißt f zweimal diffferenzierbar und man nennt $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung von f.*

Bemerkung. Offenbar ist $f^{'}$ stetig, wenn f zweimal differenzierbar ist.

THEOREM (Hinreichende Bedingung für strikte lokale Extrema). *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Gilt für ein $\xi \in (a,b)$*

$$f'(\xi) = 0 \text{ und } {}^{f''(\xi)<0}_{f''(\xi)>0},$$

so hat f in ξ ein striktes lokales ${}^{\text{Maximum}}_{\text{Minimum}}$. ***Zeichnung.*** *($f$, $f^{'}$, $f^{''}$ in beiden Fällen)*

Beweis. Wir betrachten $f'(\xi) = 0,\ f''(\xi) < 0$ (anderer Fall analog). Wegen

$$0 > f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{x - \xi}$$

gilt für alle x nahe an ξ also

$$\frac{f'(x)}{x - \xi} < 0.$$

Damit gibt es ein $\delta > 0$ mit

- $f'(x) < 0$ für $x \in (\xi, \xi + \delta)$
- $f'(x) > 0$ für $x \in (\xi - \delta, \xi)$

Also ist f strikt ${}^{\text{fallend}}_{\text{wachsend}}$ in ${}^{(\xi,\xi+\delta)}_{(\xi-\delta.\xi)}$
Daher hat f striktes Maximum in ξ. □

Bemerkung. Diese Bedingung ist nicht notwendig. (Beispiel: $f : (-1,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$. Dann hat f ein striktes Minimum in $\xi = 0$. Aber $f''(\xi) = 12\xi^2 = 0$.)

Die Betrachtungen zum Verhalten von Extremwerten mit $f^{''}(\xi) < 0$ bzw. $f^{''}(\xi) > 0$ lassen sich verallgemeinern. Dazu brauchen wir noch einen Begriff.

DEFINITION (konkav und konvex). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt ${}^{\text{konkav}}_{\text{konvex}}$, wenn für alle $c, d \in [a,b]$ mit $c < d$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt*

$$f(c + \lambda(d - c) \gtreqless f(c) + \lambda(f(d) - f(c)).$$

Beachte. Sei $\lambda \in [0,1]$ und $\mu = 1 - \lambda$. Dann gilt

$$c + \lambda(d - c) = \lambda d + (1 - \lambda)c = (1 - \mu)d + \mu c = d + \mu(c - d)$$

und mit der Geraden

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c}(x - c)$$

durch $(c, f(c))$ und $(d, f(d))$ gilt

$$g(c+\lambda(d-c)) = f(c) + \lambda(f(d) - f(c)) = \lambda f(d) + (1-\lambda)f(c).$$

Zeichnung. Konvex: Sekantenabschnitt verläuuft oberhalb der Funktion
Konkav: Sekantenabschnitt verläuft unterhalb der Funktion

Bemerkung. f konvex $\Leftrightarrow -f$ konkav

PROPOSITION. *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Ist f konvex oder konkav, so ist f stetig.*

Beweis. Wir betrachten nur konvexes f. (Der andere Fall kann analog behandelt werden.) Sei $\xi \in I$ beliebig. Wähle $x < \xi < y$ aus I beliebig. Sei g_1 die Sekante durch $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ und g_2 die Sekante durch $(\xi, f(\xi))$ und $(y, f(y))$. Dann verläuft nach Konvexität also für $s > \xi$ **Zeichnung.**

- g_2 oberhalb des Graphen von f auf $[\xi, y]$
- g_1 unterhalb des Graphen von f auf $[\xi, y]$.

Damit folgt leicht $\lim_{s\to\xi+} f(s) = f(\xi)$. Der Grenwert von links kann analog untersucht werden. □

Wir kommen nun zur schon angekündigten Verallgemeinerung der Betrachtungen um Minima/Maxima zweimal differenzierbarer Funktionen.

THEOREM (Charakterisierung konkaver und konvexer Funktionen). *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*
(a) Ist f differenzierbar, so ist f $\substack{\text{konkav}\\ \text{konvex}}$ genau dann, wenn f' monoton $\substack{\text{fallend}\\ \text{wachsend}}$ ist.
(b) Ist f zweimal differenzierbar, so ist so ist f $\substack{\text{konkav}\\ \text{konvex}}$ genau dann, wenn gilt f'' monoton $\substack{\leq 0\\ \geq 0}$.

Beweis. Offenbar folgt (b) aus (a) und der schon gegebenen Charakterisierung von Monotonie. Es bleibt also (a) zu zeigen. Wir betrachten nur konvexe f bzw. monoton wachsende f'.
Sei f' monoton wachsend: Sei $x < \xi < y$ in (a, b). Sei g_1 die Gerade durch $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ und g_2 die Gerade durch $(\xi, f(\xi))$ und $(y, f(y)$. **Zeichnung.** Nach dem Mittelwertsatz und der Monotonie von f' ist die Steigung von g_1 kleiner gleich der Steigung von g_2. Damit folgt, daß $(\xi, f(\xi))$ unterhalb der Geraden durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ liegt.

Sei f konvex. **Zeichnung.** Sei $x < y$. Sei c die Steigung der Geraden durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$. Sei $\xi \in (x, y)$. Dann ist die Steigung der Geraden durch $(\xi, f(\xi))$ kleiner oder gleich c aufgrund der Konvexität. Da $\xi \in (x, y)$ beliebig war, folgt, daß $f'(x) \leq c$. ähnlich sieht man aber $c \leq f'(y)$. □

Beispiele

- Die Funktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$ ist konkav.
  Bew. $\ln'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp x$ ist konvex.
  Bew. $\exp''(x) = \exp x > 0$.

Bemerkung. Ist f konvex und streng monoton wachsend mit der Umkehrfunktion g, so ist g konkav und umgekehrt. Ist f nicht monoton wachsend so gilt die Aussage im allgemeinen nicht (vgl. etwa die Funktion $f(x) = 1/x$.)

3. Taylorscher Satz und L'Hospitalsche Regel

In diesem Abschnitt diskutieren wir Taylorschen Satz und L'Hospitalsche Regel. Dabei geht es um

- Approximation von Funktionen durch Polynome (Taylorscher Satz)
- Verhalten von Termen der Form $0/0$ bzw ∞/∞ bzw 0∞ (L'Hospitalsche Regel).

Wir werden beides als Konseqünzen aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz erhalten.

Wir beginnen mit dem Taylorschen Satz.

Definition (k-te Ableitung). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenens Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man definiert induktiv die k-te Ableitung $f^{(k)}$ durch*

$$f^{(0)} := f,\ \ f^{(k+1)} := (f^{(k)})'$$

(falls $f^{(k)}$ auf I differenzierbar ist). Existiert $f^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so heißt f beliebig oft differenzierbar oder auch unendlich oft differenzierbar.

Idee - Taylorscher Satz

- f stetig in p:
  $$f(x) = f(p) + r(x)$$
  mit $r(x) \to 0$ $x \to p$.
- f differenzierbar in p:
  $$f(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x-p) + r(x)(x-p)$$
  mit $r(x) \to 0$ für $x \to p$ (nämlich $r(x) = \frac{\varphi(x)}{|x-p|} \to 0,\ \ x \to p$)
- f k-mal differenzierbar in p:
  $$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j + r(x)(x-p)^k$$
  mit $r(x) \to 0$, $x \to p$.

DEFINITION (Das n-te Taylorpolynom). *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann definiert man zu $p \in (a,b)$ das n-te Taylorpolynom von f im Punkt p durch*

$$P_{n,p}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k.$$

PROPOSITION. *Sei P ein Polynom vom Grad n (oder kleiner) mit*

$$P(c) = P'(c) = \ldots = P^{(n)}(c) = 0$$

für ein c. Dann gilt $P \equiv 0$.

Beweis. Das folgt durch Induktion. (Beachte. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Dann gilt $P^{(n)} = a_n n!$ ....) □

LEMMA (Charakterisierung Taylorpolynom). *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und $p \in (a,b)$. Dann ist $P_{n,p}$ das eindeutige Polynom vom Grad höchstens n mit*

$$P_{n,p}(x) = f^{(k)}(p) \quad, k = 0, \ldots, n.$$

('P und f stimmen bis zur n-ten Ableitung in p überein.')

Beweis. Eindeutigkeit. Das folgt aus vorangehender Proposition.

Gewünschte Eigenschaften: Das folgt durch eine direkte Rechnung.

Diese Rechnnung nutzt, daß die l-te Ableitung von $(x-p)^k$ an der Stelle p gegeben ist durch

$$\begin{cases} k! & l = k \\ 0 & l > k \\ 0 & l < k \quad (x = p) \end{cases}.$$

Das beendet den Beweis. □

Die Frage ist nun, wie sich f von $P_{n,p}$ unterscheidet. Eine erste Antwort gibt der folgende Satz.

THEOREM (Taylorsche Formel mit Lagrange Restglied). *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und $p \in (a,b)$. Dann existiert zu jedem $x \in (a,b)$ ein $t = t(x)$ zwischen x und p mit*

$$f(x) = P_{n,p}(x) + R_{n+1,p}(t)$$

mit dem Lagrange Restglied

$$R_{n+1,p}(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}$$

(und natürlich $P_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k$.)

Beweis. Beachte x, p gegeben! Wir entwickeln um ξ. Sei dazu

$$h(\xi) := (x-\xi)^{n+1}$$
$$g(\xi) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k.$$

Dann gilt:

·) $g(x) = f(x) \quad (k=0)$
·) $g(p) = P_{n,p}(x)$
·) $g'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \quad$ (!) *Teleskopsumme*

Nach verallgemeinertem Mittelwertsatz existiert ein t zwischen x und p mit:

$$(g(x)-g(p))h'(t) = (h(x)-h(p))g'(t).$$

Also gilt

$$(f(x)-P_{n,p}(x))(n+1)(-1)(x-t)^n = (-1)(x-p)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$
$$\Rightarrow f(x) - P_{n,p}(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1}}_{=R_{n+1,p}(t)}$$
$$\Rightarrow f(x) = P_{n,p}(x) + R_{n+1,p}(t)$$

(Es bleibt noch (!) zu begründen:

$$g(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$
$$g'(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}k(x-\xi)^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{(k-1)!}(x-\xi)^{k-1}$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

Damit ist der Beweis von (!) abgeschlossen). □

Bemerkung. (Übung). Ist $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar mit $g^{(n+1)} = 0$, so it g ist Polynom vom Grad höchstens n.

Ende der 26. Vorlesung

THEOREM (Taylorsche Formel mit Abschätzung). *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar mit $n \geq 1$ und $p \in (a,b)$. Dann gibt es eine Funktion $r : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $r(x) \to 0$, $x \to p$ und*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + r(x)\ (x-p)^n.$$

Beachte: Für $n = 1$ ist uns das wohlbekannt:

$$f(x) = f(p) + f'(p)\ (x-p) + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{(x-p)}}_{=r(x)}(x-p).$$

Beweis. Wir setzen $g(x) = f(x) - P_{n,p}(x)$. Dann gilt:

$$g(p) = g'(p) = \ldots = g^{(n)}(p) = 0.$$

Zu zeigen: Es existiert $r : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $r(x) \to 0$, $x \to p$ und $|g(x)| \leq r(x)\ |x-p|^n$.

Es gilt nun

$$|g(x)| \leq \frac{\left|g^{(n-1)}(t_x)\right|}{(n-1)!}|x-p|^{n-1} \qquad (\Diamond)$$

für ein t_x zwischen x und p (einschließlich). (Denn: Gilt $n = 1$ so wähle $t_x = x$; im Falle $n \geq 2$ wende Taylorformel mit $(n-2)$ an).
Nun ist $g^{(n-1)}$ differenzierbar, d.h.

$$g^{(n-1)}(t_x) = \underbrace{g^{(n-1)}(p)}_{=0} + \underbrace{g^{(n)}(p)(t_x-p)}_{=0} + \varphi(t_x) \qquad (\Diamond\Diamond)$$

mit

$$\frac{\varphi(y)}{y-p} \to 0, \quad y \to p.$$

$$\begin{aligned} \left\{\begin{matrix} (\Diamond) \\ (\Diamond\Diamond) \end{matrix}\right\} \Rightarrow |g(x)| &\leq \frac{\varphi(t_x)}{(n-1)!}|x-p|^{n-1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\underbrace{\frac{|\varphi(t_x)|}{|t_x-p|}}_{\to 0,\ x\to p}\underbrace{\frac{|t_x-p|}{|x-p|}}_{\leq 1}}_{\to 0,\ x\to p}|x-p|^n \\ &=: r(x)\ |x-p|^n \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Mithilfe des Satzes von Taylor können wir Funktionen mit 'vielen' verschwindenden Ableitungen auf Extrema untersuchen: Sei also $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $n \geq 2$-mal differenzierbar mit

$$f'(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p) = 0, \quad f^{(n)}(p) \neq 0.$$

Dann gilt:

- Ist n ungerade, so hat f in p einen Wendepunkt (d.h. $f(x) - f(p)$ wechselt in p das Vorzeichen).
- Ist n gerade, so hat f in p ein lokales $\substack{Maximum \\ Minimum}$, falls $\substack{f^{(n)}(p)<0 \\ f^{(n)}(p)>0}$.

Beweis. Voriger Satz liefert

$$f(x) = f(p) + \left(\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + r(x)\right)(x-p)^n$$

F'ur x nahe p hat $(\ldots)$ daßelbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(p)$ (da $r(x) \to 0,\ x \to p$) Damit folgt

$$f(x) \simeq f(p) + (Vorzeichen)\ (x-p)^n.$$

□

Notation - Landausymbole. Eine passende Notation für obige Resultate liefern die Landausymbole: o 'klein ohhh von' und $\mathcal{O}$ 'groß Ohhh von' definiert wie folgt: Sei $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, p Berührpunkt von D. Dann:

$$f(x) = o(g(x)),\quad x \to p :\Leftrightarrow \lim_{x\to p}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)),\quad x \to p :\Leftrightarrow\ \exists\, C > 0\ mit\ |f(x)| \leq C{\cdot}|g(x)| \text{für} \quad \text{x} \quad \text{nahe p.}$$

Damit können wir die Abschätzungen aus dem Taylorschen Satz wie folgt formulieren.

Folgerung. *Sei I ein offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:*
(a) Ist f n-mal differenzierbar (mit $n \geq 1$), so gilt $f(x) = P_{n,p}(x) + o((x-p)^n)$.
(b) Ist f $(n{+}1)$-mal differenzierbar (mit $n \geq 1$) so gilt $f(x) = P_{n,p}(x) + \mathcal{O}((x-p)^{n+1})$

Beweis. (a) folgt sofort aus der vorangehenden Variante des Satz von Taylor.
(b) Das folgt leicht wegen

$$f(x) = P_{n,p}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x-p)^{n+1} + o((x-p)^{n+1})}_{=\mathcal{O}((x-p)^{n+1})}.$$

Das beendet den Beweis.

□

Wir kommen nun noch zu einem weiteren Thema (das oft mit dem Taylorschen Satz verwechselt wird).

Definition (Taylor-Reihe). *Ist $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so können wir die sogenannte **Taylor-Reihe** von f im Entwicklungspunkt p*

$$T_{f,p}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k.$$

bilden.

Bemerkungen.

- ! Der Satz von Taylor behandelt NICHT die Taylorreihe: Beim Satz von Taylor geht es (bei festem n) um die Frage, wie nahe $P_{n,p}(x)$ an $f(x)$ ist für x nahe p. Bei Taylorreihen geht es (bei festem x) um die Frage, wie nahe $P_{n,p}(x)$ an $f(x)$ ist für grosse n.
- ! Es ist <u>nicht</u> klar, daß Reihe für $x \neq p$ konvergiert.
- ! Selbst wenn $T_f(x)$ konvergiert, ist nicht automatisch auch $f(x) = T_f(x)$. Dazu ein Beispiel: Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

Dann ist f für $x < 0$ beliebig oft differenzierbar mit Ableitung 0. Ebenso ist f für $x > 0$ beliebig oft differenzierbar und die Ableitung hat die Form

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{-1}{x}}$$

mit geeigneten Polynomen P_n (Induktion). Damit folgt (Induktion), daß $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (Denn: $n = 0$: klar.
$n \Longrightarrow (n+1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} &= \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
\frac{f^{(n)}(x)}{x} &= \frac{0}{x} = 0, \qquad x < 0 \\
\frac{f^{(n)}(x)}{x} &= \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right)\ e^{\frac{-1}{x}}}{x} = \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\ e^{\frac{-1}{x}} \\
&\stackrel{!}{\rightarrow} 0 \quad ,\ x \rightarrow 0^+
\end{aligned}$$

$$!\ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\ e^{\frac{-1}{x}} \stackrel{(y=\frac{1}{x})}{=} \lim_{y \to \infty} y P_n(y)\ e^{y} = 0.$$

Insgesamt gilt also

$$f \neq 0 \ \text{ aber } \ T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}(x)^k \equiv 0.$$

- Ist $R_n(x) = f(x) - P_{n,p}(x)$, so gilt

$$f(x) = T_{f,p}(x) \Leftrightarrow R_n(x) \rightarrow 0,\ n \rightarrow \infty.$$

Die vorhergehende Bemerkung zeigt, daß Taylorreihen nur mit grosser Vorsicht zu behandeln sind. Im Falle von Potenzreihen ist die Lage (wie üblich) sehr schön:

Proposition. *(Potenzreihe ist Taylorreihe) Sei* (a_n) *eine Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $\rho = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ *und* $R := \frac{1}{\rho}$ *und*

$$f : (-R + p, R + p) \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - p)^n.$$

Dann ist f *beliebig oft differenzierbar und es gilt* $f^{(n)}(p) = a_n n!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Insbesondere ist die Taylorreihe von* f *gerade die* f *definierende Potenzreihe.*

Beweis. Wir wissen schon, daß f differenzierbar ist mit $f^{'}(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-p)^n$, wobei die Reihe für g auch auf $(p-R, p+R)$ absolut konvergiert. Damit gilt also $f^{'}(p) = a_1$ und eine Induktion liefert die erste Aussage. Das 'Insbesondere' folgt dann sofort. □

Wir kommen nun zu den Regeln von **L'Hospital**. Dabei geht es um Grenzwerte der Form $0/0$ bzw ∞/∞ (bzw. $0 \times \infty$). Wir betrachten also Funktionen f und g mit $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ bzw. $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to \infty$ und untersuchen $f(x)/g(x)$.
Zur **Einstimmung** betrachten wir eine einfache Situation: Seien f, g differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(a) = g(a) = 0, \;\; g'(a) \neq 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\
&= \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

Allgemein können wir Ausdrücke der Form '$\frac{0}{0}$' und '$\frac{\infty}{\infty}$' mit folgenden Sätzen behandeln.

Theorem (L'Hospital f'ur '$\frac{0}{0}$' bei $a \in \mathbb{R}$). *Seien* $a < b$ *und* $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und differenzierbar in* (a, b) *mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$) *gegeben, und es gelte*

$$f(a) = 0 = g(a).$$

Existiert der Grezwert $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(ggf. mit Wert* $\pm\infty$*), so existiert auch* $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ *und es gilt*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Eine entsprechende Aussage gilt für $f,g:\ (a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$*.*

Bemerkung. Die Voraussetzungen implizieren $g(x)\neq 0$ für $x\neq a$ wegen

$$g(x)=g(x)-0=g^{'}(\xi)(x-a)\neq 0.$$

Beweis. Es gilt nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\overset{vMWS}{=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einem ξ zwischen x und a. Nach Vorrausetzung existiert

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und damit auch

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Theorem (L'Hospital für '$\frac{0}{0}$' bei $\pm\infty$). *Seien* $c>0$ *und differenzierbare* f,g *in* (c,∞) *mit* $g^{'}(x)\neq 0$ *auf* (c,∞) *gegeben und es gelte*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0=\lim_{x\to\infty}g(x).$$

Existiert $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(ggf. mit Wert* $\pm\infty$*, so existiert auch*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analoge Aussage gilt bei $-\infty$*.*

Beweis. Falls jeweils der Grenzwert auf der rechten Seite existiert, gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(x=\frac{1}{t})}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}\overset{voriger\ satz}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{-1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{-1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}\overset{(x=\frac{1}{t})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Da der letzte Grenzwert nach Voraussetzung existiert, folgt die Behauptung. $\square$

Ende der 27. Vorlesung

Nachdem wir den Fall $'\frac{0}{0}'$ behandelt haben, kommen wir nun zum Fall $'\frac{\infty}{\infty}'$.

THEOREM (L'Hospital f'ur '$\frac{\infty}{\infty}$' von links bzw. rechts). *Sei $a \in \mathbb{R}$ bzw. $a = \infty$. Seien f, g stetig und differenzierbar mit $g^{'}(x) \neq 0$ auf einem offenen Intervall links von a (d.h. auf $(a-r, a)$ für ein $r > 0$ falls $a \in \mathbb{R}$ bezw (c, ∞) für ein $c > 0$ falls $a = \infty$) und es gelte*

$$\infty = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x).$$

Existiert $\lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (ggf. mit Wert $\pm\infty$), so existiert auch $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechende Aussagen gelten für Grenzwerte von rechts.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $a = \infty$, $\lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $S > 0$ ein $d > 0$ mit $\frac{f'(\xi)}{f'(\xi)} \geq S$ f'ur $x \geq d$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt dann

$$\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} \overset{vMWS}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq S$$

und damit

$$f(x) - f(d) \geq S(g(x) - g(d))$$

für $x > d$. (Da $g^{'}$ nicht verschwindet, ist g streng monoton. Wegen $g \to \infty$ muss g wachsend sein. also gilt $g(x) - g(d) > 0$.) Es folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq S - S \underbrace{\frac{g(d)}{g(x)}}_{\to 0, x \to \infty} + \underbrace{\frac{f(d)}{g(x)}}_{\to 0, x \to \infty}$$

und nach Bilden des Grenzwertes also

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \geq S.$$

Da $S > 0$ beliebig war, folgt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkungen.

- **!** Die Sätze von L'Hospital haben zwei Vorausetzungen: (1) Konvergenz von f und g gegen 0 bzw. $\pm\infty$ und (2) Konvergenz von $\frac{f^{'}}{g^{'}}$. Beide Vorausetzungen sind nötig, wie man an folgendem Beispiel sieht: $f(x) = 1$, $g(x) = x + 7$. Dann gilt $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x) = 1/7$ und $\lim_{x \to 0} f^{'}(x)/g^{'}(x) = 0$.

- Ist f stetig differenzierbar in (a,b) und $p \in (a,b)$, so liefert die L'Hospitalsche Regel
$$\lim_{x\to p, x\neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{x\to p} \frac{f^{'}(x)}{1} = f^{'}(p).$$
Tatsächlich kann man das auch ohne L'Hospitalsche Regel und ohne Stetigkeit der Ableitung direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit folgen ;-)

Beispiele - L'Hospital:

- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}.$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

Zur Anwendung noch zwei Tipps.

- Gegebenenfalls kann man L'Hospital auch iterieren (d.h. mehrmals hintereinander anwenden):
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{falls\ ex.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{falls\ ex.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$
- Man kann L'Hospital auch verwenden, um Ausdrücke der Form $0 \times \infty$ zu untersuchen. Dazu schreibt man diese in der Form ∞/∞ bzw. $0/0$: Sei $\alpha > 0$:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha}\frac{x^{\alpha+1}}{x} \\ &= -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0\end{aligned}$$

KAPITEL 11

Das Riemann Integral in einer Dimension

Ziel. Ordne für geeignetes $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse einen Wert zu (wobei unterhalb der x-Achse negativ gezählt wird). Der Wert der Fläche wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet. Dabei soll gelten:

- $f(x) \equiv c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = c(b-a)$
- $c \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Ausserdem soll folgende Stetigkeitseigenschaft gelten:

- Sind f_n, g_n, $n \in \mathbb{N}$, zulässig und gilt $f_n \leq f \leq g_n$ sowie $\int_a^b (g_n - f_n)dx \to 0$, so ist auch f zulässig und es gilt
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Es zeigt sich, daß durch diese Forderungen $\int_a^b f dx$ eindeutig bestimmt ist. Es wird als das Riemann-Integral von f bezeichnet. Das Riemann-Integral ist dann *linear* d.h.
$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$$
und *positiv* d.h.
$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$
und mit gleichmässiger Konvergenz verträglich. Stetige Funktionen und monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar. Ebenso stückweise stetige und stückweise monotone Funktionen.

Bemerkung. Die entscheidende Einschränkung des Riemannintegrals ist die vergleichsweise unflexible Stetigkeitseigenschaft. Es gibt eine Reihe von zum Teil deutlich flexibleren Integralbegriffen (Lebesgü-Integral, Bochner-Integral, Daniell-Integral, Darboux-Integral, Petis-Integral). Das wird zumindest zum Teil in späteren Vorlesungen behandelt.

Um über Riemann-Integrale sprechen zu können, müssen wir voraussetzen:

- Das Intervall $[a,b]$ ist beschränkt und abgeschlossen d.h. $-\infty < a < b < \infty$,
- Die Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Wir gehen nun in zwei Schritten vor: Im ersten Schritt zerlegen wir das Intervall in Teilintervalle und approximieren f auf den Teilstücken durch konstante Funktionen. Für diese Approximation ist das Integral durch obige Forderungen eindeutig festgelegt. Im zweiten Schritt führen wir einen Grenzübergang durch. Dieser Grenzübergang muss gerechtfertigt werden. Diese Rechtfertigung wird durch eine Definition geliefert: Die Funktionen, wo er gelingt, heissen Riemann-integrierbar.

Definition (Zerlegung). *Sei $-\infty < a \le b < \infty$. Ein Tupel*

$$Z = (x_0, \ldots, x_n)$$

mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ heißt Zerlegung von $[a,b]$.
Die Feinheit $|Z|$ der Zerlegung Z ist definiert als

$$|Z| = \max\{x_i - x_{i-1},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Eine Zerlegung $Z' = (y_0, \ldots, y_k)$ heißt Verfeinerung von $Z = (x_0, \ldots, x_n)$, wenn gilt

$$\{y_i:\ i = 0, \ldots, k\} \supset \{x_i:\ i = 0, \ldots, n\}.$$

Man schreibt dann $Z' \supset Z$. Zur Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ und $Z' = (y_0, \ldots, y_k)$ definieren wir die Vereinigung $Z \cup Z'$ als die Zerlegung mit den Punkten $\{x_i:\ i = 0, \ldots, n\} \cup \{y_i:\ i = 0, \ldots, k\}$.

Approximiert man f entlang einer Zerlegung Z, so gibt es mehrere Möglichkeiten **Zeichnung.**

- "Durch Rechtecke von unten" (jeweils kleinster Funktionswert auf $[x_{i-1}, x_i]$)
- "Durch Rechtecke von oben" (jeweils größter Funktionswert auf $[x_{i-1}, x_i]$)
- "Durch irgendwelche Rechtecke" (irgendein Funktionswert auf $[x_{i-1}, x_i]$)

Uns wird es um Funktionen gehen, bei denen alle drei Möglichkeiten im Grenzwert den selben Wert ergeben.

Definition (Obersumme und Untersumme). *Zu $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a,b]$ definieren wir die Obersumme von f bezüglich Z durch*

$$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

die Untersumme von f bezüglich Z durch

$$U_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

Proposition (Eigenschaften von U_Z, O_Z). *Es gilt:*
(a) $U_Z(f) \le O_Z(f)$ *für alle* Z
(b) $Z_1 \subseteq Z_2 \;\Rightarrow\; U_{Z_1}(f) \le U_{Z_2}(f),\; O_{Z_1}(f) \ge O_{Z_2}(f)$
(c) $Z_1,\ Z_2$ *beliebig* $\Rightarrow\; U_{Z_1}(f) \le O_{Z_2}(f)$

Beweis. (a) klar.

(b) Wir betrachten nur U_Z (O_Z kann analog behandelt werden).
o.E.: Z_2 hat genau einen Punkt mehr als Z_1.
$Z_1:\ a = p < \ldots < \alpha < \beta < \ldots = b$
$Z_2:\ a = p < \ldots < \alpha < \gamma < \beta < \ldots = b$
In Z_1: $(\beta-\alpha)\inf_{\alpha\le x\le\beta} f(x) = (\beta-\gamma)\inf_{\alpha\le x\le\beta} f(x) + (\gamma-\alpha)\inf_{\alpha\le x\le\beta} f(x)$
In Z_1: $(\beta-\alpha)\inf_{\alpha\le x\le\beta} f(x) \le (\beta-\gamma)\inf_{\alpha\le x\le\beta} f(x) + (\gamma-\alpha)\inf_{\alpha\le x\le\beta} f(x)$

Damit folgt die Behauptung (b).

(c) $U_{Z_1}(f) \overset{\text{b)}}{\le} U_{Z_1\cup Z_2}(f) \overset{\text{a)}}{\le} O_{Z_1\cup Z_2}(f) \le O_{Z_2}(f)$ Das beendet den Beweis. □

Definition (Riemann-Summe). *Ist* $Z = (p, \ldots, x_n)$ *eine Zerlegung von* $[a, b]$ *und* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *mit* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *gegeben.*
So definiert man die Riemann-Summe von f *bezüglich der Zerlegung* Z *und den Stützstellen* ξ *als*

$$S_{Z,\xi}(f) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

Lemma (Charakterisierung Riemann-integrierbarkeit). *Sei* $-\infty < a \le b < \infty$ *und* $f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt. Dann sind äquivalent:*

(i) $\sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f)$
(ii) *Für alle* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Zerlegung* Z *von* $[a, b]$ *mit* $O_Z(f) - U_Z(f) \le \varepsilon$
(ii) *Es existiert ein* $I_f \in \mathbb{R}$, *sodaß zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit*

$$|S_{Z,\xi}(f) - I_f| \le \varepsilon$$

für alle Zerlegungen Z *mit Feinheit* $|Z| \le \delta$.

In diesem Fall gilt:

$$I_f = \sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f)$$

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$: Da $U_{Z_1}(f) \le O_{Z_2}(f)$ für alle Z_1, Z_2 (s.o.) folgt

$$\sup_{Z_1} U_{Z_1}(f) \le \inf_{Z_2} O_{Z_2}(f)$$

Wähle nun $Z_1 = Z_2 = Z$. Damit ergibt sich:

$$0 \le \inf O_Z(f) - \sup U_Z(f) \le \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, gilt (i).

$(i) \Rightarrow (ii)$: Zu $\varepsilon > 0$ existieren Z_1 und Z_2 mit

$$0 \leq O_{Z_2}(f) - U_{Z_1}(f) \leq \varepsilon$$

Da $O_{Z_2}(f) \geq O_{Z_1 \cup Z_2}(f)$ und $U_{Z_1}(f) \leq U_{Z_1 \cup Z_2}(f)$ folgt

$$O_{Z_1 \cup Z_2}(f) - U_{Z_1 \cup Z_2}(f) \leq \varepsilon$$

und damit (ii) mit $Z = Z_1 \cup Z_2$.

Ende der 28. Vorlesung

$(i)/(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $C > 0$ mit $|x| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$. Sei

$$I_f := \sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f)$$

und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach $(i)/(ii)$ existiert eine Zerlegung $\tilde{Z} = (x_0, \ldots, x_N)$ mit

$$I_f - \frac{\varepsilon}{2} \leq U_{\tilde{Z}}(f) \leq O_{\tilde{Z}}(f) \leq I_f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für eine sehr feine Zerlegung Z liegen nun die Terme von $S_{Z,\xi}$ zwischen den Termen von $O_{\tilde{Z}}(f)$ und $U_{\tilde{Z}}(f)$ außer an den Punkten $x_0, \ldots, x_N$ **Zeichnung**. Für $Z = (y_0, \ldots, y_k)$ mit Feinheit δ gilt:

$$U_{\tilde{Z}}(f) - \delta NC \leq S_{Z,\xi}(f) \leq O_{\tilde{Z}}(f) + \delta NC$$

wobei N die Anzahl der Intervalle ist. Nach der Definition von I_f ergibt sich

$$I_f - \frac{\varepsilon}{2} - \delta NC \leq U_{\tilde{Z}}(f) - \delta NC \leq S_{Z,\xi}(f) \leq O_{\tilde{Z}}(f) + \delta NC \leq I_f + \frac{\varepsilon}{2} + \delta NC$$

Für alle $\delta > 0$ mit $\delta NC \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ergibt sich also

$$|S_{Z,\xi}(f) - I_f| \leq \varepsilon$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ gemäß (iii) gewählt. Dann gilt

$$I_f + \varepsilon \geq S_{Z,\xi}(f) \geq I_f - \varepsilon$$

für jede Wahl der Stützstellen ξ. Damit folgt auch

$$I_f + \varepsilon \geq O_Z(f) \geq U_Z(f) \geq I_f - \varepsilon$$

Das liefert gerade

$$O_Z(f) - U_Z(f) \leq 2\varepsilon$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Hinter (iii) verbirgt sich Konvergenz eines *Netzes.* Man schreibt dann auch $\lim_{|Z| \to 0} S_{Z,f}(\xi)$ fuer den Grenzwert I_f.

Definition (Riemann-Integrierbarkeit). *Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemmas erfüllt ist. Dann definiert man das Riemann-Integral von f in $[a, b]$ als*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b f dx := \sup_Z U_Z(f) = \inf_Z O_Z(f) = I_f =: \lim_{|Z| \to 0} S_{Z,\xi}(f)$$

Weiterhin setzt man $\int_b^a f(x) := -\int_a^b f(x)dx$ *sowie* $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Es gibt im wesentlichen drei Klassen von Riemann-integrierbaren Funktionen:

- Treppenfunktionen
- stetige Funktionen
- monotone Funktionen

Definition (Treppenfunktion). *Eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung* $Z = (x_0, \dots, x_n)$ *von* $[a,b]$ *und* $c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n$ *gibt mit*

$$f \equiv c_i \text{ auf } (x_{i-1}, x_i)$$

Bemerkung. Die Werte einer Treppenfunktion in den Stellen x_j sind unerheblich.

Proposition (Treppenfunktionen sind Riemann-integrierbar). *Jede Treppenfunktion ist Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i$$

wenn $f \equiv c_i$ *auf* (x_{i-1}, x_i) *für die Zerlegung* $Z = (x_0, \dots, x_n)$ *von* $[a,b]$.

Beweis. Übung □

Proposition (Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar). *Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Da $[a,b]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist das stetig f auf $[a,b]$ beschränkt und gleichmäßig stetig, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \varepsilon$ für $|x - \tilde{x}| < \delta$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Ziel: Finde Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$.
Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$(\star) \qquad |f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für } |x - \tilde{x}| < \delta$$

Wähle nun eine beliebige Zerlegung Z mit $|Z| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \underbrace{\Big(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \Big)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ nach } (\star)} \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &= (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Proposition (Monotone Funktionen sind Riemann-integrierbar). *Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Sei f o.E. monoton wachsend (anderer Fall analog). Sei

$$Z = \left(a, a + \frac{b-a}{n}, \ldots, a + (n-1)\frac{b-1}{n}, b\right)$$

eine äquidistante Zerlegung mit Feinheit $\frac{b-a}{n}$. Dann gilt wegen der Monotonie:

$$\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f(x_i) \qquad \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = f(x_{i-1})$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ (Teleskopsumme) &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \\ &\to 0,\ n \to \infty \end{aligned}$$

Damit folgt die Riemann-Integrierbarkeit. $\square$

Bemerkung. Die vorangehenden beiden Aussagen gelten auch, wenn man das Intervall $[a,b]$ in abgeschlossene Intervalle teilen kann, auf denen f die entsprechende Eigenschaft hat.

Proposition (Eigenschaften: Linear und positiv). *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*
(a) $f + \alpha g$ ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_a^b f + \alpha g dx = \int_a^b f dx + \alpha \int_a^b g dx$$

(b) $f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f dx \leq 0$
Insbesondere gilt also $g \leq f \Rightarrow \int_a^b g dx \leq \int_a^b f dx$

Beweis. (a) folgt aus Betrachtungen zu Riemann-Summen durch Grenzübergang.
(b) folgt aus Betrachtungen zu Riemann-Summen durch Grenzübergang.
Das 'Insbesondere' folgt dann mit (a) und (b). ($g \leq f \Rightarrow 0 \leq f - g \Rightarrow \int_a^b f - g dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f dx - \int_a^b g dx$.) $\square$

Bemerkung. Die Riemann-integrierbaren Funktionen bilden einen unendlichdimensionalen Vektorraum (vgl. Lineare Algebra).

Proposition (Eigenschaften: Zusammensetzen von Intervallen). *Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $c \in (a,b)$ gegeben. Dann gilt:*

- *Ist $f : [a,b]$ Riemann-integrierbar, so sind auch die Einschränkungen $f|_{[a,c]}, f|_{[c,b]}$ Riemann-integrierbar und es gilt*
$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$
- *Ist $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $g : [c,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist auch*
$$h : [a,b] \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) : & x \in [a,c) \\ 0 : & x = c \\ g(x) : & x \in (c,b] \end{cases}$$
Riemann-integrierbar und es gilt:
$$\int_a^b h dx = \int_a^c f dx + \int_c^b g dx$$

Beweis.

- Einfach (Einschränkung von "guten" Zerlegungen auf $[a,c]$ bzw. $[c,b]$)
- Einfach (Zusammensetzen von "guten" Zerlegungen)

Das beendet den Beweis. □

Proposition (Rechenregeln: Einfache Operationen). *Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:*

- *$|f|$ ist Riemann-integrierbar und*
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \le \int_a^b |f| dx$$
- *Die Funktionen $\min\{f,g\}, \max\{f,g\} : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar und es gilt*
$$\int_a^b \min\{f,g\} dx \le \min\{\int_a^b f(x) dx, \int_a^b g(x) dx\}$$
sowie
$$\int_a^b \max\{f,g\} dx \ge \max\{\int_a^b f dx, \int_a^b g dx\}.$$

Beweis. Zum ersten Punkt: Eine einfache Fallunterscheidung zeigt
$$\sup_J |f(x)| - \inf_J |f(x)| \le \sup_J f(x) - \inf_J f(x)$$
für jedes Teilintervall J von $[a,b]$. Damit folgt
$$O_Z(|f|) - U_Z(|f|) \le O_Z(f) - U_Z(f).$$

Da f Riemann-integrierbar ist, folgt nun, daß $|f|$ Riemann integrierbar ist. Wegen $-|f| \leq f \leq |f|$ folgt dann aus der Positivität des Integrals

$$-\int_a^b |f|dx \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f|dx.$$

Das liefert die Behauptung. (Alternativ kann die Abschätzung auch mit der Dreiecksungleichung für Riemann-Summen beweisen werden: $|S_{Z,\xi}(f)| \leq S_{Z,\xi}(|f|)$. Nach Grenzübergang folgt dann die Behauptung.)

Zum zweiten Punkt: Es gilt

$$\min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2},\ \max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$

Nun folgt die Behauptung aus dem ersten Punkt und der Linearität des Integrals. □

Beispiel - nicht Riemann-integrierbare Funktion. Sei

$$f:\ [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1: & x \text{ rational} \\ 0: & x \text{ irrational} \end{cases}$$

gegeben. Dann gilt für jede Zerlegung z von $[0,1]$

$$U_Z(f) = 0 \text{ und } O_Z(f) = 1$$

Insbesondere ist f nicht Riemann-integrierbar.

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ sind, gilt

$$U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = 0$$

$$O_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) = 1$$

□

Beispiel- Ausrechnen einer Riemannsumme. Sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{R},\ f = c \equiv$ const. gegeben. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

Beweis. Es handelt sich um eine Treppenfunktion. □

Beispiel - Ausrechnen einer Riemannsumme. Sei $f:\ [a,b] \to \mathbb{R},\ f = x$ gegeben. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Zeichnung - Differenz der Flächen zweier Dreiecke.

Beweis. Es ist f stetig und damit Riemann-integrierbar. Damit ergibt sich das Integral aus

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|z|\to 0} S_{Z,\xi}(f)$$

Seien $Z_n = \left(a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}, \ldots, b\right)$ und $\xi_n = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
S_{Z_n,\xi_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left(na + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&= (b-a)a + \frac{b-a}{n}\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2} = ba - a^2 + \frac{b^2-2ab+a^2}{2}\frac{n(n+1)}{n^2} \\
&\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} ba - a^2 + \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2} \\
&= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$

□

Das war mühsam!!!

Für stetige Funktionen gibt es eine andere Methode das Riemann-Integral zu berechnen. Diese lernen wir jetzt kennen.

Definition (Stammfunktion). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Eine Funktion $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu f, wenn F differenzierbar ist mit $F^{'} = f$.*

Ende der 29. Vorlesung

Bemerkungen.

- Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich durch eine Konstante (denn $F^{'} = G^{'}$ impliziert $F - G =$ *constant* (nach Mittelwertsatz s.o.)).
- Seien $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben, f stetig und $F' = f$ auf (a,b). Dann gilt: In a existiert die rechtsseitige Ableitung von F und es gilt $F'(a) = f(a)$. In b existiert die linksseitige Ableitung von F und es gilt $F'(b) = f(b)$.
  (Bew. $\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = f(\xi)$ und f ist stetig....)
- $f = F^{'}$ impliziert, daß $f(I)$ ein Intervall ist (Zwischenwertsatz für Ableitungen, vgl. Übung). Damit hat man einen ersten Test, ob ein f eine Stammfunktion haben kann.

Nun zur angekündigten Methode zur Integration stetiger Funktionen:

Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung - HDI). *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

- *Die Funktion* $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, $G(x) := \int_a^b f(t)dt$ *ist eine Stammfunktion von* f.
- *Ist* F *eine Stammfunktion von* f, *so gilt*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Bemerkung. Der HDI besagt insbesondere, daß jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt und liefert dann eine Methode zur Integration, nämlich '"Finde Stammfunktion". In diesem Sinne ist die Integration die Umkehrung der Differentiation. Den Differentiationsregeln 'Kettenregel' und 'Produktregel' entsprechen dabei die Substitutionsregel und die partielle Integration (s.u.).

Beweis. Zum ersten Punkt: Aus der Definition von G folgt

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Idee. $G(x+h) - G(x) \sim h(f(x) + \text{kleiner Fehler})$.
Durch Multiplizieren von $\frac{1}{h}$ und **Trick!** Subtrahieren von

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt$$

erhält man

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(f(t) - f(x)\right) dt$$

Daraus folgt dann durch Bilden des Betrages

$$\begin{aligned}
\left|\frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x)\right| &\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \\
&\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sup_{x\leq s\leq x+h} |f(s) - f(x)|\, dt \\
&= \frac{1}{h} \sup_{x\leq s\leq x+h} |f(s) - f(x)| \int_x^{x+h} dt \\
&= \sup_{x\leq s\leq x+h} |f(s) - f(x)| \\
&\to 0,\ h \to 0,\ \text{da } f \text{ stetig}
\end{aligned}$$

Nun zum zweiten Punkt: Ist F eine Stammfunktion zu f, so gilt $F' = f = G'$ also $(F-G)' = 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann also eine Konstante c mit

$$F - G = c$$

also

$$F = G + c.$$

Damit folgt

$$F(b)-F(a) = (G(b)+c)-(G(a)+c) = G(b)-G(a) = G(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung. Zum Beweis des ersten Punktes des Haupsatzes der Differential und Integralrechnung kann man auch nutzen:

$$h \min\{f(t) : x \leq t \leq x+h\} \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq h \max\{f(t) : x \leq t \leq x+h\}.$$

Bemerkung. Integrale unstetiger Funktionen sind im allgemeinen nicht differenzierbar: Betrachtet man zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0 : & x < 0 \\ 1 : & x \geq 0 \end{cases}$$

So ist $G(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ gegeben durch

$$G(x) = \begin{cases} 0 : & x \leq 0 \\ x : & x > 0 \end{cases}.$$

Damit ist G in $x = 0$ nicht differenzierbar.

Notation. Man schreibt $F = \int f(x)dx$ oder $F+C = \int f(x)dx$, falls F eine Stammfunktion zu f ist also $\int_a^b = F(b) - F(a)$ gilt. Ein solches F ist nur bis auf eine Konstanten eindeutig bestimmt. Weiterhin schreibt man dann $F|_a^b$ für $F(b) - F(a)$.

Beispiele - Stammfunktionen

- $\int x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha} x^{\alpha+1} + C$ für $\alpha \neq 1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$. Beachte: $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln|b| - \ln|a| = \ln\frac{b}{a}$ für $0 < a < b$ bzw. $a < b < 0$.
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C$ für $a > 0$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ mit $\tan(x) = \sin x / \cos x$.
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ mit $\cot x = \cos x / \sin x$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin + C$
- $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
- $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \mathrm{arsinh} x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \mathrm{arcosh} x + C$

Zum Finden von Stammfunktionen gibt es drei Methoden:

- Nachschaün in einer Liste (z. B. Bronstein),
- Substitutionsregel,
- partielle Integration.

Oft sind auch Kombinationen dieser Methoden nützlich.

THEOREM (Substitutionsregel). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_c^d f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion zu f. Dann ist nach der Kettenregel $F \circ \varphi$ differenzierbar mit

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

d. h. $F \circ \varphi$ ist eine Stammfunktion zu $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Damit folgt

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F \circ \varphi(d) - F \circ \varphi(c) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung.

- Die Substitutionsregel ist also die Umkehrung der Kettenregel.
- Es wird nicht voraussgesetzt, daß φ bijektiv ist. Es ist möglich, daß $\varphi(c) > \varphi(d)$.

Die Substitutionsregel kann in zwei verschiedenen Varianten angewandt werden:

"Von links nach rechts": Im Integral stehen bereits die Funktion φ und die Ableitung φ', sodaß man direkt substituieren kann. Die wichtigste Anwendung dieser Variante ist die *logarithmische Integration*:

Beispiele

- Logarithmische Integration:
$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt \overset{\varphi(t)=f(t)}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{f(b)}{(f(a))}.$$
(falls f auf $[a,b]$ stetig ist und festes Vorzeichen hat (also insbesondere nicht verschwindet).
- $\int_a^b \tan x dx = -\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln \frac{\cos(a)}{\cos(b)}$.
- $\int_a^b (2t) e^{t^2} dt \overset{\varphi(t)=t^2}{=} \int_a^b \varphi'(t) e^{\varphi(t)} dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} e^x dx = e^{b^2} - e^{a^2}$.

"Von rechts nach links": Durch geschicktes Substituieren versucht man das Integral zu vereinfachen. Dazu wird zunächst x durch $\varphi(t)$ ersetzt und die Ableitung gebildet

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \qquad \text{"}dx = \varphi'(t) dt\text{"}.$$

Anschliessend ersetzt man dann die Grenzen $a = \varphi(c)$ und $b = \varphi(d)$ durch c mit $a = \varphi(c)$ und d mit $b = \varphi(d)$.

Beispiel $\int_a^b 2ye^{y^2} \overset{y=\sqrt{t}}{=} \int_{a^2}^{b^2} 2\sqrt{t}e^t \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int_{a^2}^{b^2} e^t dt = e^{a^2} - e^{b^2}$

Wir kommen nun zur 'Umkehrung' der Produktregel.

Theorem (Partielle Integration). *Seien $f, g :\ [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und g stetig differenzierbar und F Stammfunktion zu f. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Beweis. Nach Produktregel gilt $(Fg)'(x) = F'g + Fg' = fg + Fg'$. Also folgt $fg = (Fg)' - Fg'$. Integrieren liefert dann

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b (Fg)'(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx = Fg|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Beispiele.

- Es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b x\sin x dx &= x(-\cos x)|_a^b - \int_a^b 1(-\cos x)dx \\ &= -x\cos x|_a^b + \int_a^b \cos x dx \\ &= -b\cos c + a\cos a + \sin b - \sin a\end{aligned}$$

- Es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2 e^x dx &= x^2e^x\Big|_a^b - \int_a^b 2xe^x dx \\ &= x^2e^x\Big|_a^b - \left(2xe^x|_a^b - \int_a^b 2e^x dx\right) \\ &= x^2e^x\Big|_a^b - 2xe^x|_a^b + 2e^x|_a^b \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x\Big|_a^b\end{aligned}$$

Manchmal liefert partielle Integration eine Iterationsformel für ein Integral. **Beispiel**

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sin^n x dx &= \int_a^b \underbrace{\sin x}_{f} \underbrace{\sin^{n-1} x}_{g} dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_a^b - \int_a^b (-\cos x)(n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_a^b + \int_a^b (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_a^b + (n-1)\int_a^b (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx \\
\Rightarrow n \int_a^b \sin^n x dx &= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_a^b + (n-1)\int_a^b \sin^{n-2} x dx \\
\Rightarrow \int_a^b \sin^n x dx &= \frac{-\cos x \sin^{n-1} x}{n}\Bigg|_a^b + \frac{n-1}{n}\int_a^b \sin^{n-2} x dx
\end{aligned}
$$

Es kann auch nützlich sein, die konstante Funktion 1 ins Integral zu schreiben. **Beispiel**

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \ln x dx &= \int_a^b \underbrace{1}_{f} \underbrace{\ln x}_{g} dx \\
&= x \ln x|_a^b - \int_a^b x \frac{1}{x} dx \\
&= x \ln x|_a^b - x|_a^b
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Wir haben partielle Integration und Substitution bisher nur für bestimmte Integrale eingeführt. Für die unbestimmten Integrale (Stammfunktionen) gelten analoge Regeln.