Höhere Analysis II

Wintersemester 2018/2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Donnerstag 01.11.2018**

(1) Für $k \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ sei der Operator $K : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ definiert durch

$$(Kf)(x) = \int k(x,y)f(y)dy$$

für $x \in X$. Zeigen Sie, daß K ein beschränkter linearer Operator ist und berechnen Sie K^*.

(2) Sei H ein Hilbertraum. Zeigen Sie, daß ein $T \in L(H)$ genau dann normal ist, wenn $TT^* = T^*T$ gilt.

Erinnerung: Ein dicht definierter Operator T in H heißt normal, wenn $D(T) = D(T^*)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in D(T)$ gilt.

(3) Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ normal (vgl. Aufgabe 2). Zeigen Sie $\|T\| = r(T)$.

Hinweis: Vervollständigen Sie die Beweisskizze aus der Vorlesung. Zeigen Sie dazu insbesondere $\|(T^*T)^{2^n}\| = \|T\|^{2^{n+1}}$.

(4) Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Zeigen Sie $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.