Höhere Analysis I

Sommersemester 2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Pfingstzettel **Abgabe Dienstag 26.05.2015**

(1) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Folge $(x_n) \subseteq H$ heißt schwach konvergent gegen $x \in H$, wenn für alle $y \in H$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Zeigen Sie: Eine Folge $(x_n) \subseteq H$ konvergiert genau dann gegen x, wenn sie schwach gegen x konvergiert und $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$ gilt.

(2) Zeigen Sie, dass eine Norm auf einem reellen Vektorraum genau dann von einem Skalarprodukt erzeugt wird, wenn die Norm die Parallelogrammidentität erfüllt.

(3) Für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sei der Träger $supp(f)$ definiert durch die Menge aller Elemente $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) \neq 0$. Definiere den Vektorraum

$$c_c := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \ : \ supp(f) \subset \mathbb{N} \text{ endlich}\}$$

der endlich getragenen Funktionen auf $\mathbb{N}$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{f(n)}\, g(n), \qquad f, g \in c_c.$$

Zeigen Sie, dass es einen abgeschlossenen Unterraum $U \subset c_c$ mit $U \neq c_c$ gibt, sodass $U^\perp = \{0\}$.

(2) Seien $m : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ und $1 \leq p < \infty$ gegeben. Wir definieren die gewichteten Folgenräume

$$\ell^p(\mathbb{N}, m) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p m(n) < \infty\}$$

und normieren diese mittels

$$\|x\|_{p,m} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p m(n)\right)^{1/p}.$$

Desweiteren sei $I = \inf_{n\in\mathbb{N}} m(n)$ und $S = \sum_{n=1}^{\infty} m(n)$. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < q < \infty$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) Falls $I > 0$, so gilt $\ell^p(\mathbb{N}, m) \subseteq \ell^q(\mathbb{N}, m)$, sowie

$$\sup\{\|x\|_{q,m} \,|\, x \in \ell^p(\mathbb{N}, m), \|x\|_{p,m} \leq 1\} = I^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

(b) Falls $S < \infty$, so gilt $\ell^q(\mathbb{N}, m) \subseteq \ell^p(\mathbb{N}, m)$, sowie

$$\sup\{\|x\|_{p,m} \,|\, x \in \ell^q(\mathbb{N}, m), \|x\|_{q,m} \leq 1\} = S^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

(c) Ist $I = 0$ bzw. $S = \infty$, so gelten die in (a) bzw. (b) gegebenen Inklusionen nicht.