Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 7

Abgabe am 12.12.2017

Aufgabe 1. Seien $N, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq N$, $M \subset \mathbb{R}^N$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Sei (U, φ) eine Parameterdarstellung von M. Zeigen Sie, dass die Parameterdarstellung (U, φ) genau dann regulär ist, wenn die zugehörige Gramsche Determinante $G_\varphi : U \to [0, \infty)$ nirgends verschwindet.

Hinweis: Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times d}$ mit $d \leq N$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\det(A^* A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Rang} A = d.$$

Aufgabe 2. Sei $0 < r < R$ und $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u, v) := R \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $D\Phi$, $D\Phi^T D\Phi$ und $\det D\Phi^T D\Phi$. Skizzieren Sie die zugehörige Fläche.

Aufgabe 3. Sei $f : (a, b) \to [0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei

$$\Phi : (a, b) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \phi) \mapsto (f(r) \cos \phi, f(r) \sin \phi, r).$$

Untersuchen Sie unter welchen weiteren Voraussetzungen es sich bei Φ um eine reguläre Parametrisierung handelt. (Man nennt die durch Φ erzeugte Fläche, die durch f erzeugte Rotationsfläche.)

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die folgenden Parametisierungen im $\mathbb{R}^3$.

(a) Kugelkoordinaten:

$$\Phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto R(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi).$$

(b) Polarkoordinaten:

$$\Psi : (0, 2\pi) \times (-pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi, \theta) \mapsto R(\cos \phi \cos \theta, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta).$$

Zusatzaufgabe 5. Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die Parametisierung der Sphäre mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ durch

(a) die stereographische Projektion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{R}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, 1 - u^2 - v^2),$$

(b) die Mercatorabbildung

$$\Psi : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{R}{\cosh v}(\cos u, \sin u, \sinh v).$$