# Höhere Analysis I

**Sommersemester 2018** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 8** **Abgabe Donnerstag 07.06.2018**

(1) Gegeben seien Hilberträume $H$, $K$ und $L$.

(a) Zeigen Sie für alle beschränken linearen Operatoren $A, B$ von $H$ nach $K$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die Aussagen:

$$(A^*)^* = A \text{ und } (A + \lambda B)^* = A^* + \overline{\lambda} B^*.$$

(b) Zeigen Sie für alle beschränkten linearen Operatoren $A$ von $K$ nach $L$ und $B$ von $H$ nach $K$

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

(2) Gegeben seien Hilberträume $H$, $K$ und $L$. Zeigen Sie:

(a) Für alle beschränkten linearen Operatoren $A, B$ von $H$ nach $K$ gilt $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(b) Für alle beschränkten linearen Operatoren $A$ von $H$ nach $K$ und $B$ von $K$ nach $L$ gilt $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$.

(3) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum. (Es bedeutet $\sigma$-endlich, daß meßbare Teilmengen $(A_n)$ existieren mit $\mu(A_n) < \infty$ und $X = \cup_n A_n$.)

(a) Zeigen Sie, daß jedes meßbare $A$ mit $\mu(A) > 0$ eine meßbare Teilmenge $B$ enthält mit $0 < \mu(B) < \infty$.

(b) Sei $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar und beschraenkt und

$$M_\varphi : L^2(X, \mu) \longrightarrow L^2(X, \mu), \quad f \mapsto \varphi f,$$

der Operator der Multiplikation mit $\varphi$. Bestimmen Sie $\|M_\varphi\|$.

(4) Sei $H$ ein Hilbertraum und $T$ ein linearer beschränkter Operator von $H$ nach $H$. Zeigen Sie: Gilt $\|T\| < 1$, so existiert $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ (d.h. die Reihe konvergiert bzgl. der Operatornorm) und es gilt $S(I - T) = I = (I - T)S$. (Hier bezeichnet $I$ die Identität auf $H$.)

**Zusatzaufgabe.**
In einem Hilbertraum $H$ enthält jede beschränkte Folge $(x_n)$ eine Teilfolge $(x_{n_k})$, sodass für jedes $y \in H$ die Folge $k \mapsto \langle x_{n_k}, y \rangle$ konvergiert.

Hinweis: Es reicht (Warum?) sich auf den separablen Fall zu beschränken.