Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Weihnachtszettel **Abgabe 6.1.2010**

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**
Die erste Aufgabe beschäftigt sich mit einer Beschreibung der reellen Zahlen durch gewisse Abbildungen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$.
Sei dazu

$$E := \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid \text{es existiert } C \text{ mit } |f(n) + f(m) - f(n+m)| \leq C \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z}\ \}$$

und

$$B := \{g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid \text{es existiert } D \text{ mit } |g(n)| \leq D \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Für eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$f_\alpha(n) := \lfloor n\alpha \rfloor,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer oder Abrundungsfunktion ist, d.h. für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so dass $n \leq x$.
Zeigen Sie zunächst die folgenden Aussagen.

(a) Es gehört f_α zu E für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $f \in E$. Es existiert ein $C \geq 0$ mit $|f(nm) - mf(n)| \leq Cm$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt

$$\left| \frac{f(n)}{n} - \frac{f(m)}{m} \right| \leq \frac{C}{n} + \frac{C}{m}.$$

(c) Für $g \in E$ konvergiert die Folge $(\frac{1}{n} g(n))$ gegen ein $\alpha(g) \in \mathbb{R}$.

Sei also für $g \in E$

$$\alpha(g) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} g(n).$$

Zeigen Sie im weiteren die folgenden Aussagen.

(d) Es gilt $g - f_{\alpha(g)} \in B$ für alle $g \in E$.

(e) Es gilt $f_\alpha - f_\beta \in B$ genau dann wenn $\alpha = \beta$ gilt.

(f) Sind f, g in E, so gilt $f - g \in B$ genau dann, wenn $\alpha(f) = \alpha(g)$ gilt.

Zeigen Sie:

(g) Auf der Menge E eine Äquivalenzrelation gegeben ist, durch $\sim$ mit

$$f \sim g :\Longleftrightarrow f - g \in B.$$

Die Äquivalenzklasse $[f]$ von f ist die Menge aller g, die zu f äquivalent sind, d.h.

$$[f] = \{g \in E \mid f - g \in B\}.$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit E/B bezeichnet, d.h.

$$E/B = \{[f] \mid f \in E\}$$

(h) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$J : \mathbb{R} \to E/B, \quad \beta \mapsto [f_\beta]$$

bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung gegeben ist durch

$$K : E/B \to \mathbb{R}, \quad [g] \mapsto \alpha(g).$$

Die Abbildungen J und K sind gut mit den Rechenoperationen auf $\mathbb{R}$ verträglich. Zeigen Sie dazu:

(i) Es gilt $\alpha(f + g) = \alpha(f) + \alpha(g)$ für alle $f, g \in E$.

(j) Es gilt $\alpha(f \circ g) = \alpha(f) \cdot \alpha(g)$ für alle $f, g \in E$.

(k) Entscheiden Sie welche dieser Aussagen richtig ist und beweisen Sie diese:

(k1) Seien $f, g \in E$. Dann gilt $\alpha(f) \geq \alpha(g)$ genau dann wenn ein n_0 existiert, so dass $f(n) \geq g(n)$ für alle $n \geq n_0$.

(k2) Seien $f, g \in E$. Dann gilt $\alpha(f) > \alpha(g)$ genau dann wenn ein n_0 existiert, so dass $f(n) > g(n)$ für alle $n \geq n_0$.

(k3) Seien $f, g \in E$. Dann folgt aus $\alpha(f) > \alpha(g)$ die Existenz von n_0, so dass $f(n) > g(n)$ für alle $n \geq n_0$. Andererseits falls ein n_0 existiert, so dass $f(n) \geq g(n)$ für $n \geq n_0$, dann gilt $\alpha(f) \geq \alpha(g)$.

(k4) Seien $f, g \in E$. Dann gilt $\alpha(f) > \alpha(g)$ dann und nur dann wenn für alle $f' \in [f]$, $g' \in [g]$ ein n_0 existiert so dass $f'(n) > g'(n)$ für $n \geq n_0$.

Hinweis:
Natürlich können Sie zum Lösen eines Teiles der Aufgabe die vorher bewiesenen Aussagen verwenden.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

In dieser Aufgabe geht es um Implikationen von der Konvergenz von Folgen auf die Konvergenz gewisser Mittel. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei (x_n) eine konvergente Folge. Dann konvergiert auch die Folge $(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})$ ihrer arithmetischen Mittel und besitzt den gleichen Grenzwert wie (x_n). Entsprechendes gilt für bestimmt divergentes (x_n).

(b) Sei (x_n) mit $x_n > 0$ eine konvergente Folge. Dann konvergiert stets auch die Folge $(\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}})$ ihrer harmonischen Mittel und besitzt den gleichen Grenzwert.

(c) Sei (x_n) mit $x_n > 0$ eine konvergente Folge. Dann konvergiert stets auch die Folge $(\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n})$ ihrer geometrischen Mittel und besitzt den gleichen Grenzwert.

(d) Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $x_n > 0$. Konvergiert die Folge $(\frac{x_n}{x_{n-1}})$, so konvergiert auch die Folge $(\sqrt[n]{x_n})$ und besitzt den gleichen Grenzwert.

(e) Geben Sie jeweils ein Beispiel dafür an, dass die Konvergenz der ursprünglichen Folge nicht aus der Konvergenz der harmonischen/geometrischen Mittel folgt.

Berechnen Sie die Grenzwerte der angegebenen Folgen:

(f) $\left(\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}\right)$,

(g) $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$.

Hinweis:
Zum Beweis von (b) können Sie (a) nutzen.
Zum Beweis von (c) können Sie (a) und (b) nutzen oder Sie können ähnlich wie im Beweis von (a) verfahren.
Zum Beweis von (d) können Sie (c) nutzen.
...

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Menge

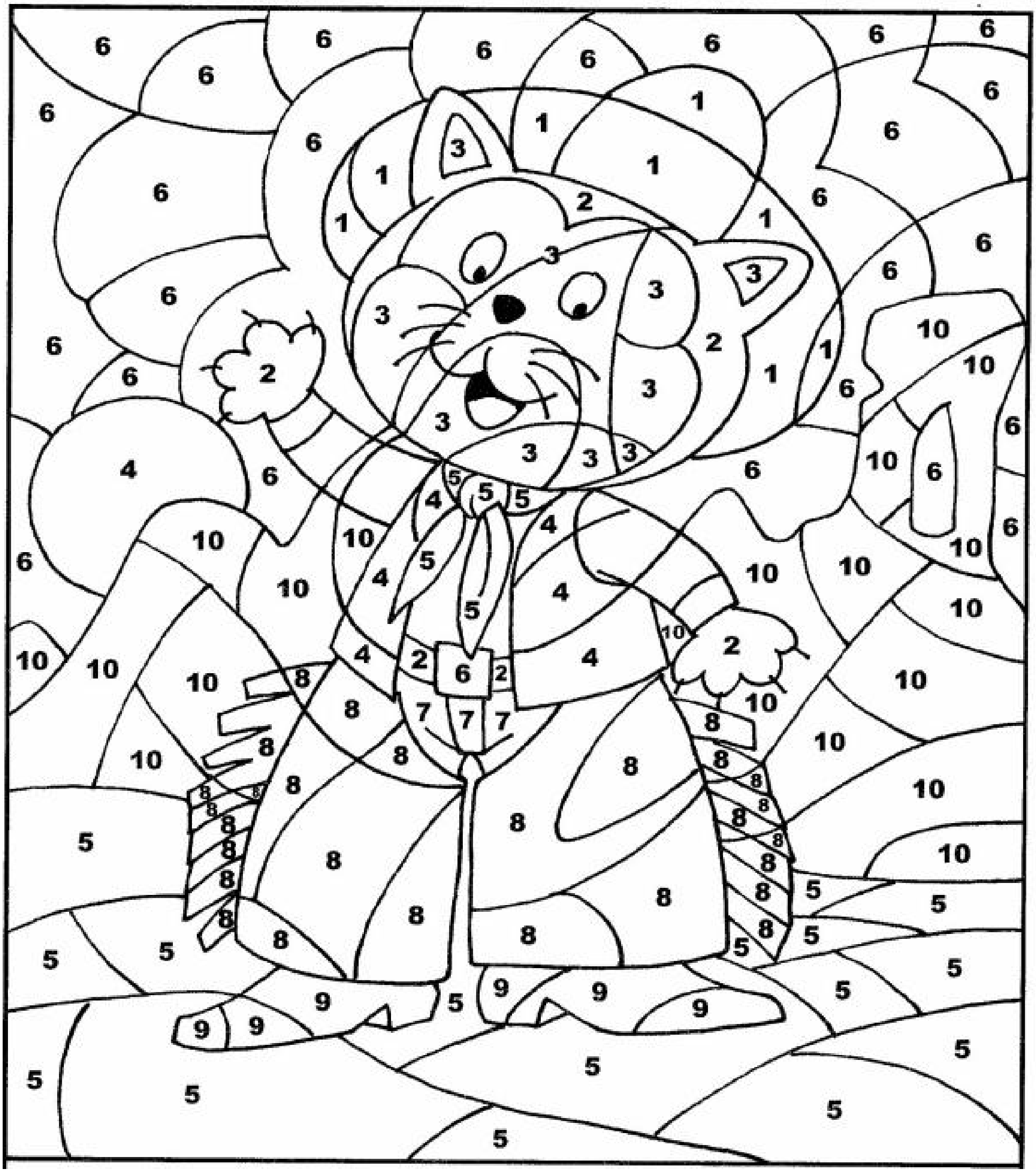
$$\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\} := \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$$

überabzählbar ist.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Malen nach Zahlen:

(a) Ignorieren Sie die Zahlen auf der Zeichnung und färben Sie die Flächen mit vier Farben, so dass zwei aneinandergrenzende Flächen nie die selbe Farbe besitzen.



(b*) Beweisen Sie (ohne Zuhilfenahme computeralgebraischer Mittel!), dass eine solche Färbung für ein beliebiges "Malen nach Zahlen" Bild möglich ist.