Analysis I

Wintersemester 2013/2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe 20.12.2013**

(1) Zeigen Sie: Für keine Menge X gibt es eine surjektive Abbildung $J : X \to \mathcal{P}(X)$, wobei die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ die Menge der Teilmengen von X ist. In diesem Sinne ist also die Potenzmenge einer Menge echt mächtiger als die Teilmengen von X.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und betrachten Sie $\{x \in X : x \notin J(x)\} \ldots$.

(2) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei P die Menge der Häufungspunkte von (x_n). Zeigen Sie, dass die Häufungspunkte jeder Folge aus P wieder Häufungspunkte von (x_n) sind.

(3) Bestimmen Sie den lim inf und den lim sup der folgenden Folgen

(a) $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $x_n = \frac{42^n}{n^{42}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Gibt es eine Folge (x_n) mit

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -1, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0?$$

Geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel an.

(4) Skizzieren Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| - \bar{z} = 1 + 2i\}$,

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| = |z - 3 - 5i|\}$,

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{2}\}$.

Zusatzaufgaben:

(Z1) Bestimmen Sie lim inf und lim sup der Folge

$$x_n = \sqrt{2}n - \lfloor \sqrt{2}n \rfloor, \; n \in \mathbb{N},$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte natürliche Zahl ist, die kleiner als $x \in \mathbb{R}$ ist.

(Z2) Geben Sie jeweils eine Folge mit

(0) keinem,

(1) einem,

(2) zwei,

(3) drei,

$\vdots$

($\aleph_0$) abzählbar unendlich vielen,

($\aleph_1$) überabzählbar unendlich vielen

Häufungspunkt(en) an.