# Analysis II

**Sommersemester 2011** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 8** **Abgabe Mittwoch 01.06.2011**

(1) Sei $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^N$ stetig und $t_0 \in (a,b)$. Zeigen Sie, $\gamma$ ist genau dann in $t_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{1}{t-t_0}(\gamma(t) - g(t_0))$ existiert.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $f$ ist stetig differenzierbar für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Die Richtungsableitungen von $f$ in $(0,0)$ existieren für alle Richtungen.

(c) $f$ ist in $(0,0)$ nicht stetig.

(3) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{3/2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $f$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

(b) Die partiellen Ableitungen sind bei $(0,0)$ nicht stetig.

Bemerkung: Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist also nur ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit!

(4) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_i(0,0) = 0$ für $i \in \{1,2,3\}$ und $f_1(x,y) = \frac{x\,y}{x^2+y^2}$, $f_2(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4}$ und $f_3(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ folgende Eigenschaften besitzen:

(a) $f_1$ ist partiell stetig, aber nicht richtungstetig in $(0,0)$,

(b) $f_2$ ist richtungsstetig, aber nicht stetig in $(0, 0)$,

(c) $f_3$ ist stetig in $(0, 0)$.

**Zusatzaufgabe**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen sie, dass eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(x) = 0$ für $x \in A$ und $f(x) = 1$ für $x \in B$ existiert.

Viel Erfolg!