Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe Mittwoch 13.01.2010**

(1) Der Volterra-Integraloperator $T : C([a,b]) \to C([a,b])$ mit Kern $k \in C([a,b] \times [a,b])$ ist definiert durch

$$Tf(s) := \int_a^s k(s,t) f(t)\, dt.$$

Zeigen Sie, dass die Volterra-Integralgleichung $(Id - \lambda T)f = g$ zu gegebenen $g \in C([a,b])$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ genau eine Lösung hat. Stellen Sie diese Lösung durch eine Neumannsche Reihe dar.
Hinweis: Betrachten Sie den Spektralradius von T.

(2) Es sei der Volterra-Integraloperator $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ gegeben durch

$$Tf(s) := \int_0^s f(t)\, dt.$$

Bestimmen Sie dessen Spektrum und zeigen Sie, dass 0 kein Eigenwert ist.

(3) Es sei der Fredholmsche Integraloperator $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ gegeben durch

$$Tf(s) := \int_0^1 st f(t)\, dt.$$

Bestimmen Sie dessen Spektrum.

(4) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und T ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeigen Sie, dass die Abbildung $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ definiert durch

$$|\!|\!|[x]|\!|\!| := \inf_{y \in T} \|x + y\|$$

eine Norm auf dem Quotientenraum X/T liefert.

Zusatzaufgabe Sei $1 < p < \infty$. Der Fredholmsche Integraloperator $T : L^p([a,b]) \to L^p([a,b])$ mit Kern $k \in L^\infty([a,b] \times [a,b])$ ist definiert durch

$$Tf(s) := \int_a^b k(s,t) f(t)\, dt.$$

Zeigen Sie, dass T ein kompakter Operator ist.