

---

# Höhere Analysis I

Sommersemester 2018

Prof. Dr. D. Lenz

---

Blatt 2

Abgabe Donnerstag 26.04.2018

- (1) Es seien Maße  $\mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  auf einen messbaren Raum  $(X, \mathcal{A})$  gegeben. Zeigen Sie, dass durch  $\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$  ein Maß definiert wird, falls  $\mu_n \leq \mu_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Hinweis: Es gilt  $\mu_n \leq \mu_{n+1}$ , falls für alle  $A \in \mathcal{A}$  die Ungleichung  $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$  gilt.

- (2) Gegeben seien Maße  $\mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  auf einen messbaren Raum  $(X, \mathcal{A})$ . Zeigen Sie für beliebige  $a_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \mu_n$  ein Maß bildet.

- (3) Zeigen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge von  $\mathbb{R}$  eine Borelmenge ist. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

auf Messbarkeit.

- (4) Betrachten Sie die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ausgestattet mit der Borel  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Für eine Folge  $x_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die Abbildung  $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  durch  $\mu := \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{x_n}$  wobei

$$\delta_{x_n}(A) := \begin{cases} 1, & x_n \in A, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

- (a) Wann gilt für beschränkte Intervalle  $I \subsetneq \mathbb{R}$ , dass  $\mu(I) < \infty$ ?

- (b) Welche Eigenschaften muss die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzen damit  $\mu$   $\sigma$ -endlich ist?  
Hinweis: Ein Maß  $\mu$  heißt  $\sigma$ -endlich, falls messbare Mengen  $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  existieren mit  $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  und  $\mu(A_n) < \infty$ .

**Zusatz.**

Die Cantormenge  $C$  entsteht aus dem Intervall  $[0, 1]$ , indem zunächst das offene

mittlere Drittel herausgenommen wird, aus den zwei verbleibenden Intervallen wieder jeweils das offene Drittel herausgenommen wird, usw., also

$$C := [0, 1] \setminus \left( \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \cup \left( \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right) \cup \left( \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right) \cup \dots \right)$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- a) Die Menge  $C$  ist eine Lebesgue Nullmenge.
- b) Die Menge  $C$  besteht genau aus den Punkten  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$  mit  $a_j \in \{0, 2\}$ .
- c) Die Menge  $C$  ist überabzählbar.