Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe Mittwoch 18.05.2011**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $e : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, e(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$. Zeigen Sie:

(a) Es ist e eine Metrik.

(b) Zu beliebigen $x \in X$ und $r > 0$ existieren ρ, $\sigma > 0$ mit

$$U^e_\rho(x) \subset U^d_r(x),$$

$$U^d_\sigma(x) \subset U^e_r(x).$$

(c) Es erzeugen e und d dieselbe Topologie.

(d) Eine Folge (x_n) konvergiert gegen x bzgl. d genau dann, wenn sie bzgl. e gegen x konvergiert.

(e) Eine Folge ist eine Cauchy Folge bzgl. e genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge bzgl. d ist.

(2) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $x \in M$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kompakt ist.

(3) Sei $M \neq \emptyset$ eine endliche Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. Zeigen Sie, dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass

$$cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y) \text{ für alle } x, y \in M.$$

(4) Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{F_n\}_{n \geq 1}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter Mengen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $F_n \supset F_{n+1}$ für alle $n \geq 1$

(ii) $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} F_n = 0$.

Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ gelten muss.

Erinnerung: Für eine beschränkte Menge $B \subset M$ bezeichnet

$$\operatorname{diam} B = \sup\{d(x,y) : x, y \in B\}$$

den Durchmesser von B.

Zusatzaufgaben

(1) Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung besprochene normierte Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ vollständig ist.

Anleitung: Sei $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge. Zeigen Sie der Reihe nach:

- u_n konvergiert punktweise gegen eine Folge u, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $u_n(m) \to u(m)$.
- Es existiert $c > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\|(u)_N\|_2 \leq C,$$

  wobei $(u)_N = (u_1, u_2, \ldots, u_N, 0, \ldots)$ für $u = (u_1, u_2, \ldots)$ definiert ist.
- $u \in \ell^2$.
- $\|(u - u_n)_N\| \to 0$ gleichmäßig in N.

(2) Zeigen Sie, dass es eine bijektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in das offene Intervall $(0,1)$ gibt, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

Viel Erfolg!