Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 9 **Abgabe Mittwoch 13.01.2016**

(1) Man bestimme das Taylorpolynom 2. Grades von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) \;=\; \cos xy \;+\; xe^{y-1},$$

an der Stelle $(\pi, 1)$.

(2) Sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck, das durch die Geraden $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}, \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 6\}$ begrenzt wird. Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2y(4 - x - y)$. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von f sowie deren Art.

(3) Zeigen Sie anhand des Beispiels $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2, y^3)$, dass sich der Mittelwertsatz nicht auf Abbildungen von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^M$ mit $M > 1$ übertragen lässt.

(4) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^N$ und $V \subseteq \mathbb{R}^M$ offen. Sei weiterhin $f : U \to V$ bijektiv und differenzierbar in $p \in U$ und sei die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar in $f(p)$. Zeigen Sie:

   (a) $Df(p)$ ist invertierbar und es gilt $Df^{-1}(f(p)) = (Df(p))^{-1}$.

   (b) Es ist $M = N$.

   Hinweis: Betrachten Sie $f \circ f^{-1} : V \to V$ und $f^{-1} \circ f : U \to U$ und verwenden Sie die Kettenregel.