Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 13 **Abgabe Mittwoch 06.07.2011**

(1) Es sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $Dh(x)$ invertierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Weiterhin gelte

$$|h(x)| \to \infty, \text{ für } |x| \to \infty.$$

Zeigen Sie, dass h mindestens eine Nullstelle hat.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\psi(x) = |h(x)|^2$ und repetieren Sie den Beweis des Satzes über die Umkehrfunktion.

(2) Sei $(X, \mathcal{R})$ ein Mengenring und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Zeigen Sie, dass μ stetig von unten ist, dass also für beliebige Mengen $B_n, B \in \mathcal{R}$, die $1_{B_n} \nearrow 1_B$ erfüllen, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int 1_{B_n}(x) d\mu(x) = \int 1_B(x) d\mu(x).$$

Erinnerung(en): $1_{B_n} \nearrow 1_B$ bedeutet $1_{B_n}(x) \leq 1_{B_{n+1}}(x)$ und $\lim_{n\to\infty} 1_{B_n}(x) = 1_B(x)$ für alle $x \in X$. Für Indikatorfunktionen 1_A ist das Integral durch $\int 1_A(x) d\mu(x) = \mu(A)$ definiert.

Hinweis: Nutzen Sie die σ-Additivität des Prämaßes.

(3) Sei $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $\mathbb{R}$ und λ das Lebesgueprämaß. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die außerhalb einer $\lambda-$Nullmenge stetig ist.

(4) Zeigen Sie, dass $C_c(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig und hat kompakten Träger}\}$ dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ liegt, dass also für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R})$ existiert, mit

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Erinnerung: Man sagt eine stetige Funktion f hat kompakten Träger, falls die Menge

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

kompakt ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, warum es ausreicht die Aussage für Indikatorfunktionen von abgeschlossenen Intervallen zu beweisen.

Zusatzaufgabe
Zeigen Sie, dass stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger Lebesgue-integrierbar sind und ihr Riemann-Integral mit ihrem Lebesgue-Integral übereinstimmt.