C*-Algebren

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 1

(1) Finden Sie ein Beispiel eines Banachraums und lineare beschränkte Operatoren $a, b \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ mit der Eigenschaft, dass $ab = I$, aber weder a noch b invertierbar sind.

(2) Es seien a und b Elemente einer komplexen Banachalgebra mit Eins. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

- $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$,
- im allgemeinen gilt nicht $\sigma(ab) = \sigma(ba)$,
- sind ab und ba invertierbar, so sind auch a und b invertierbar.

(3) Sei A eine Banachalgebra mit Eins. Zeigen Sie:

- für alle $a \in A$ konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} a^n,$$
absolut. Der Grenzwert wird mit $\exp a$ bezeichnet.
- Wenn a und b kommutieren, so gilt
$$\exp(a + b) = (\exp a)(\exp b).$$
- Für alle $a \in A$ gehört $\exp a$ zu $GL(A)$.

(4) Zeigen Sie, dass der Raum $L^1(\mathbb{R})$ der Lebesgue integrablen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit der Faltung
$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y)\, dy$$
eine kommutative Banachalgebra ohne Eins ist.