# Höhere Analysis 1

**Sommersemester 2012** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 3** **Abgabe Freitag 11.05. 2012**

(1) Sei $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik ausgestattet und $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $\{x \in M : f \text{ ist stetig in } x\}$, die Menge der Stetigkeitspunkte von $f$, eine $G_\delta$-Menge. Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $A_\varepsilon := \{x \in M : \exists \text{ offene Umgebung } U \text{ von } x \text{ so dass für alle } y, z \in U \text{ gilt: } |f(y) - f(z)| < \varepsilon\}$.

(b) Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen rationalen Zahlen stetig, aber in allen irrationalen Zahlen unstetig ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ keine $G_\delta$-Menge ist.

(c) Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen irrationalen Zahlen stetig, jedoch in allen rationalen Zahlen unstetig ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ für irrationales } x > 0 \\ \frac{1}{q} & , \text{ für rationales } x = \frac{p}{q} \text{ wobei } p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

(2) Sei $(M, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen. Desweiteren existiere zu jedem $x \in M$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Dann ist die Menge $\{x \in M : f \text{ ist stetig in } x\}$ eine dichte $G_\delta$-Menge.

(Möglicher) Lösungsweg:

(i) Nach Aufgabe 1 (a) ist die Menge der Stetigkeitspunkte eine $G_\delta$-Menge.

(ii) Sei $A_\varepsilon$ wie in Aufgabe 1. Dann liegt $A_\varepsilon$ dicht in $M$.
Hinweis: Nehmen Sie dazu an $A_\varepsilon$ wäre nicht dicht. Dann gäbe es eine nichtleere abgeschlossene Kugel $B \subseteq M \setminus A_\varepsilon$. Betrachten Sie nun die Mengen

$$E_n = \bigcap_{i,j \geq n} \{x \in B : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon/5\}$$

und zeigen Sie, dass ein $E_{n_0}$ eine offene Kugel $U$ enthält. Schließen Sie daraus, dass $|f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \varepsilon/5$ für alle $x \in U$ gilt und damit $A_\varepsilon \cap U \neq \emptyset$ erfüllt ist. Widerspruch.

(iii) Aus $(i)$ und $(ii)$ folgt die Aussage.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Die Menge der Stetigkeitspunkte von $f'$ ist eine dichte $G_\delta$-Menge in $\mathbb{R}$. Hinweis: Aufgabe 2.

(4) Sei $(M, d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $M$ abzählbar, so liegt mindestens ein Punkt aus $M$ diskret.

(b) Hat $(M, d)$ keine diskreten Punkte, so ist jede dichte $G_\delta$-Menge überabzählbar.

Erinnerung: Man sagt ein Punkt $x \in M$ liegt diskret, falls $\{x\}$ offen ist.

**Zusatzaufgaben.**

- Das Produkt abzählbar unendlich vieler metrischer Räume $(M_i, d_i)$, $i \in \mathbb{N}$, ist metrisierbar. Hinweis: Für $x, y \in \prod M_i$ betrachte man die Metrik

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x(i), y(i))}{1 + d_i(x(i), y(i))}.$$

- Das Produkt überabzählbar vieler metrische Räume mit mindestens 2 Elementen ist nicht metrisierbar.

- Die in Blatt 1, Aufgabe 3 gegebene Topologie ist nicht metrisierbar.