Gewöhnliche Differentialgleichungen

SS 2015 **Sommerzettel - Lösungsskizze**

(1) Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) + v(t) \\ v'(t) &= 4u(t) - 2v(t) \end{aligned}$$

zu den Anfangswerten $u(0) = 0$, $v(0) = 5$.
Die Eigenwerte der Matrix lauten $-3,2$. Als Ansatz erhalten wir

$$u(t) := Ae^{-3t} + Be^{2t} \text{ und } v(t) := Ce^{-3t} + De^{2t}.$$

Da beide Funktionen das System lösen sollen

$$-3Ae^{-3t} + 2Be^{2t} = (A + C)e^{-3t} + (B + D)e^{2t}$$

$$-3Ce^{-3t} + 2De^{2t} = (4A - 2C)e^{-3t} + (4B - 2D)e^{2t}$$

hieraus ergeben sich via Koeffizientenvergleich

$$-3A = A + C$$

$$2B = B + D$$

$$-3C = 4A - 2C$$

$$2D = 4B - 2D$$

und damit also

$$C = -4A \text{ und } D = B.$$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(t) := Ae^{-3t} + Be^{2t} \text{ und } v(t) := -4Ae^{-3t} + Be^{2t}.$$

Es ergibt sich schlussendlich durch die Anfangswerte

$$A + B = 0$$

$$-4A + B = 5$$

ergo $A = -1$ und $B = 1$.
Die Lösung ist daher gegeben durch

$$u(t) := -e^{-3t} + e^{2t} \text{ und } v(t) := 4e^{-3t} + e^{2t}$$

auf $\mathbb{R}$. Man rechnet leicht nach, dass das wirklich eine Lösung ist. Nach Vorlesung ist die Lösung eindeutig.

(2) Löse $u'' - 4u = 0$ zu den Anfangswerten $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$. Betrachte dazu $t^2 - 4 = 0$ mit den Lösungen $t_1 = 2$ und $t_2 = -2$. Damit ergibt sich, dass sich die Lösung wie folgt zusammensetzt:

$$u(t) = c_1 \cdot e^{2\cdot t} + c_2 \cdot e^{-2\cdot t}.$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 =& c_1 + c_2 \\ 1 =& 2 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 \end{aligned}$$

ergo $c_1 = \frac{1}{4}$ und $c_2 = -\frac{1}{4}$. Also erhalten wir insgesamt als Lösung

$$u(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{2\cdot t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2\cdot t}$$

auf $\mathbb{R}$. Man rechnet leicht nach, dass das wirklich eine Lösung ist. Nach Vorlesung ist die Lösung eindeutig.

(3) Anfangswertproblem

$$u''(t) + 2\gamma u'(t) + \omega_0^2 u(t) = 0,\ u(0) = 0,\ v(0) = v_0.$$

Mit dem Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ erhalten wir das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

1. Fall: $\gamma = \omega_0$

Eine Lösung ist gegeben durch

$$u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(t) = v_0 te^{-\gamma t}.$$

2. Fall: $\gamma > \omega_0$

Eine Lösung ist gegeben durch

$$u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + Be^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}).$$

Einsetzen der der Anfangsbedingungen liefert

$$u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t$$

3. Fall: $\gamma < \omega_0$:

Eine Lösung ist gegeben durch

$$u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} + Be^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}})$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$u\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t.$$

In allen Fällen rechnet man (mehr oder weniger einfach) nach, dass u wirklich eine Lösung ist. Nach Vorlesung ist sie auch eindeutig.

(4) Für jede Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix T sodass TAT^{-1} in Jordannormalform ist. Es gilt $(TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}$ (Induktion) und daher $e^{TAT^{-1}} = Te^AT^{-1}$. Da sowohl $\det(TAT^{-1}) = \det A$ als als $\operatorname{tr}(TAT^{-1}) = \operatorname{tr} T$ gilt, reicht es, die Aussage für A in Jordannormalform zu beweisen.

Dann ist e^A in Jordannormalform mit Diagonaleinträgen $(e^A)_{ii} = e^{A_{ii}}$ und somit

$$\det e^A = \prod_{i=1}^n (e^A)_{ii} = \prod_{i=1}^n e^{A_{ii}} = e^{\sum_{i=1}^n A_i i} = e^{\operatorname{tr} A}.$$