Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 2 **Abgabe: Donnerstag 7.5.2010**

(1) a.) Stellen Sie die folgende Differentialgleichung in expliziter Form dar:

$$y' - \left((y''+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{y'''} \right) \;=\; 0.$$

b.) Geben Sie ein äquivalentes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung an.

(2) Seien $a, b > 0$ gegeben. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' \;=\; (ay \;-\; b)\, y.$$

Zeigen Sie, dass es $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ gibt, so dass y die Differentialgleichung genau dann löst, wenn $z(x) = \lambda y(\tau x)$ die DGL $z' = (1-z)z$ löst.

(3) a.) Machen Sie für das folgende Anfangswertproblem den 'Reihen-Ansatz' $y(x) = a_0 \;+ a_1 x + a_2 x^2 \;+\; \cdots$ und leiten Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n ab.

$$x\, y'' \;=\; y \;+\; x \qquad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$$

b.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(4) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; x \;+\; y \;+\; 1\,, \qquad\qquad y(0) \;=\; 1,$$

indem Sie die Differentialgleichung in eine separierte DGL umformen.

Zusatzaufgaben:

1. Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen 2. Ordnung für $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\mathbf{u}'' \;=\; \begin{pmatrix} -K-L & L \\ L & -L-M \end{pmatrix} \mathbf{u},$$

   Es gehört zu einem System von zwei harmonischen Schwingern mit Federkonstanten K und M und einer sie koppelnden Feder mit Federkonstante L.

   Wandeln Sie dieses in ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung um.

2. Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$y' \;=\; \exp(ax + by).$$

   Wenn y eine Lösung ist, dann sei z durch $z(x) = \lambda y(\tau x)$ definiert mit λ und τ zwei reelle Konstanten.

   Zeigen Sie, dass es eine positive Konstante $C > 0$ gibt, so dass genau dann y eine Lösung obiger Differentialgleichung ist, wenn z Lösung ist von

$$z' \;=\; C \exp(x + y).$$

3. a.) Machen Sie für die DGL des folgenden Anfangswertproblems den 'Reihen-Ansatz' $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$:

$$x\, y'' \;=\; -\, y' \;+\; y \;+\; 1, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

   Leiten Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten c_n ab.

   b.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

4. Lösen Sie das AWP

$$y' \;=\; (\,x \;+\; y\,)^2, \qquad\qquad y(0) \;=\; 1.$$

   Führen Sie zunächst die DGL mit Hilfe des Ansatzes $u(x) := x + y(x)$ zurück auf eine Form, welche Trennung der Variablen erlaubt.

   (Hinweis: Betrachten Sie $u'(x)$.)