Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Dienstag 13.01.2015**

(1) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Polkappe einer Kugel mit Radius $R > 0$ im dreidimensionalen euklidischen Raum, definiert durch

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 < r, z > 0\}.$$

(2) Seien $a, b > 0$ und $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2/a^2 - y^2/b^2\}$.

(a) Zeichnen Sie M.

(b) Bestimmen Sie die Tangentialebene in einem Punkt $p \in M$.

(3) Seien M und N Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^m$ bzw. des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $M \times N$ ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{m+n}$ der Dimension $\dim M + \dim N$.

(4) Die Determinante einer $n \times n$-Matrix ist eine Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $D\det$, (wobei $D\det B = (\partial_{i,j} \det B)_{i,j=1}^n$ für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\partial_{i,j}$ die partielle Ableitung nach der (i, j) -ten Komponente ist, $i, j = 1, \ldots, n$).

(b) Zeigen Sie, dass die allgemeine lineare Gruppe $GL(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$ eine n^2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(c) Berechnen Sie $T_A GL(n)$, $A \in GL(n)$.

Zusatz

(Z1) (a) Zeigen Sie $\det e^A = e^{\mathrm{spur} A}$, wobei die Spur einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ definiert ist als $\mathrm{spur} A = a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}$ und $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$.

(b) Bearbeiten Sie auf Aufgabe (4) (b), (c) für $SL(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$.

Hinweis: Sei $T_I GL(n)$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Spur 0 und I die Einheitsmatrix. (Die Spur einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ ist definiert als $\mathrm{spur} A = a_{1,1} + \ldots + a_{n,n}$.) Zeigen Sie: Ist $A \in T_I GL(n)$, so definiert $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, t \mapsto e^{tA}$ eine Kurve in $GL(n)$ mit $\gamma(0) = I$ und $\dot\gamma(0) = A$. (Zeigen Sie zunächst $\det e^A = e^{\mathrm{spur} A}$ mit Hilfe der Definition $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$.)

(Z2) (a) Sei $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^k \to M := \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^N$, $k < N$, ein stetig differenzierbarer, regulärer Homöomorphismus. Dann ist M eine Untermannigfaltigkeit.

(b) Sei $h > 0$ und

$$\phi : U := (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, h\theta).$$

Zeigen Sie, dass die Wendelfläche $\phi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.