Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 4

Abgabe am 14.11.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring über die Menge X und $p \in X$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta_p : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in A, \\ 0 & \text{falls } p \notin A, \end{cases}$$

ein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$ ist.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{N}$ versehen mit dem Mengenring $\mathcal{R}$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Weiterhin sei eine beliebige nichtnegative Abbildung $b : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\nu_b : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\nu_b(A) := \sum_{x \in A} b(x), \qquad A \in \mathcal{R},$$

ein Prämaß ist.

Aufgabe 3. Sei μ ein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$. Zeigen Sie, dass die Vereinigung von abzählbar vielen μ-Nullmengen wieder eine μ-Nullmenge ist.

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring über X und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$. Zeigen Sie, dass μ stetig von unten ist, dass also für beliebige Mengen $B_n, B \in \mathcal{R}$, die $1_{B_n} \nearrow 1_B$ erfüllen, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_X 1_{B_n} \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X 1_B \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Erinnerung(en): $1_{B_n} \nearrow 1_B$ bedeutet $1_{B_n}(x) \leq 1_{B_{n+1}}(x)$ und $\lim_{n\to\infty} 1_{B_n}(x) = 1_B(x)$ für alle $x \in X$. Für Indikatorfunktionen 1_A ist das Integral durch $\int_X 1_A(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)$ definiert.
Hinweis: Nutzen Sie die σ-Additivität des Prämaßes.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe 5. Sei $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $\mathbb{R}$. Weiterhin sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtfallende, rechtsstetige Funktion. Setze

$$\begin{aligned} \phi(x+) &:= \lim_{y \to x+} \phi(y) = \phi(x), \\ \phi(x-) &:= \lim_{y \to x-} \phi(y). \end{aligned}$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mu(]a,b[) :=& \phi(b-) - \phi(a), \\ \mu(]a,b]) :=& \phi(b) - \phi(a), \\ \mu([a,b[) :=& \phi(b-) - \phi(a-), \\ \mu([a,b]) :=& \phi(b) - \phi(a-). \end{aligned}$$

Jedes A aus dem Mengenring lässt sich als disjunkte endliche Vereinigung $A = \cup_{j=1}^n A_j$ von beschränkten Intervallen schreiben. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mu_\phi : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

ein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$ ist.