C*-Algebren

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 5

Im Folgenden sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra.

(1) Ein zweiseitiger Zentralisator (double centraliser) einer C^*-Algebra ist ein Paar linearer Operatoren (L, R) auf $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt

$$L(ab) = L(a)b, \quad R(ab) = aR(b) \quad \text{und} \quad R(a)b = aL(b).$$

Zeigen Sie:

(a) L und R sind beschränkte Operatoren.

(b) $\|L\| = \|R\|$.

(c) Sei $c \in \mathcal{A}$, dann ist das Paar von Operatoren (L_c, R_c) definiert durch

$$L_c(a) = ca \quad R_c(a) = ac$$

ein zweiseitiger Zentralisator auf $\mathcal{A}$, und es gilt $\|L_c\| = \|R_c\| = \|c\|$.

(2) Die Menge aller zweiseitigen Zentralisatoren wird mit $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ bezeichnet. Eine Norm von $(L, R) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ wird durch $\|(L, R)\| = \|L\|$ definiert. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{B}(\mathcal{A})$.

(b) Seien $(L_1, R_1), (L_2, R_2) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, dann ist $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ mit dem punktweisen Produkt

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) := (L_1 L_2, R_2 R_1)$$

eine Algebra.

(c) Zu $L : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, definiere $L^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ durch $L^*(a) := (L(a^*))^*$. Die Abbildung $L \mapsto L^*$ ist eine isometrische konjugiert-lineare Abbildung von $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ nach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ mit den Eigenschaften $L^{**} = L$ und $(L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$. Ist $(L, R) \in \mathcal{A}$, dann wird durch die Abbildung

$$(L, R)^* = (R^*, L^*)$$

eine Involution auf $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ definiert.

(d) $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist mit den oben definierten Operationen Multiplikation, Involution und Norm eine C^*-Algebra.

(3) Die Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ wird als Multiplikator Algebra von $\mathcal{A}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung
$$\mathcal{A} \to \mathcal{M}(\mathcal{A}), \quad a \mapsto (L_a, R_a)$$
ist ein isometrischer $*$-Homomorphismus.

(b) $\mathcal{A}$ ist ein wesentliches Ideal in $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

(c) Sei $\mathcal{I}$ ein abgeschlossenes Ideal von $\mathcal{A}$. Dann existiert ein eindeutiger $*$-Homomorphismus $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{M}(\mathcal{I})$, der die Einbettung $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{I})$ fortsetzt.

(d) Dieser Homomorphismus ist injektiv, falls $\mathcal{I}$ ein wesentliches Ideal in $\mathcal{A}$ ist.

(4) (a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass das Ideal der kompakten Operatoren wesentlich in $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ ist und daher $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ als Multiplikator Algebra der kompakten Operatoren angesehen werden kann.

(b) Sei X ein lokal kompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass das Ideal $C_0(X)$ wesentlich in $C_b(X)$, der C^*-Algebra der stetigen, beschränkten Funktionen auf X, ist.

Hinweis: Aufgabe (3) zeigt, dass die Multiplikator Algebra $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ die größte C^*-Algebra ist, die $\mathcal{A}$ als wesentliches abgeschlossenes Ideal enthält.