
Analysis III

Wintersemester 2009/2010

Prof. Dr. D. Lenz

Blatt 5

Abgabe Montag 30.11. 2009

(1) Überprüfen Sie ob folgende Kurven rektifizierbar sind:

a.) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0, \end{cases}$

b.) $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0. \end{cases}$

Tipp: Geben Sie eine obere bzw. untere Abschätzung für die Kurvenlänge an und skizzieren Sie diese.

(2) Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie ihre Länge:

a.) $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}),$

b.) $\rho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ für $a > 0.$

(3) Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Vektorfeldern um konservative Vektorfelder handelt:

a.)

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \cosh x \cos y \\ -\sinh x \sin y \end{pmatrix},$$

b.)

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & : x = y = 0, \\ \begin{pmatrix} g_-(x, y) \\ g_+(x, y) \end{pmatrix} & : \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $g_{\pm} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + y^2} \pm x)}.$

(4) Zeigen Sie folgende Aussage: Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann sternförmig, wenn eine Indexmenge A und konvexe Mengen $C_{\alpha} \subseteq \mathbb{R}^d, \alpha \in A$ existieren, so dass $\bigcap_{\alpha \in A} C_{\alpha} \neq \emptyset$ und $U = \bigcup_{\alpha \in A} C_{\alpha}$ ist. (Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in C$ und $t \in [0, 1]$ gilt $tx + (1-t)y \in C$.)

Tipp: Die Menge A muss im allgemeinen überabzählbar gewählt werden.

Zusatzaufgaben:

(Z1) Überprüfen Sie ob folgende Kurve rektifizierbar ist und berechnen Sie ggf. ihre Länge:

$$\gamma : [0, e^{\pi/4}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t \sin(\log t) & t > 0, \\ 0 & t = 0; \end{cases}$$

- (Z2) a.) Geben Sie ein Beispiel einer sternförmigen Menge, die sich nicht als abzählbare Vereinigung von konvexen Mengen darstellen lässt.
- b.) Geben Sie ein Beispiel einer sternförmigen und offenen Menge, die sich nicht als abzählbare Vereinigung von konvexen Mengen darstellen lässt.