Probeklausur Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Hilfsmittel. Keine.

---

(1) (a) Sei (N, e, ν), wobei N eine Menge mit $e \in N$ ist und $\nu : N \to N \setminus \{e\}$, gegeben. Wie lauten die Peano-Axiome für (N, e, ν)?

(b) Zeigen Sie, dass $\nu : N \to N \setminus \{e\}$ bijektiv ist, falls (N, e, ν) die Peano Axiome erfüllt.

(c) Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen und es seien A_n, $n \in N$, die eindeutig bestimmten Teilmengen von N, für die gilt $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$. Seien weiterhin Aussagen $B(n)$, $n \in N$, gegeben. Zeigen Sie, dass $B(n)$ für alle $n \in N$ wahr ist, falls gilt:

- $B(e)$ ist wahr.
- Gilt $B(k)$ für alle $k \in A_n$, so folgt dass $B(\nu(n))$ wahr ist.

(d) Zeigen Sie per Induktion, dass für reelle Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

(2) (a) Wann heißt ein angeordneter Körper ordnungsvollständig?

(b) Geben Sie jeweils ein Beispiel für einen angeordneten Körper an, der ordnungsvollständig und der nicht ordnungsvollständig ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

(c) Gegeben seien beschränkte Teilmengen M_1 und M_2 von $\mathbb{R}$. Was können Sie über die Beschränktheit der Menge

$$M_1 + M_2 := \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2\}$$

sagen? In welcher Beziehungen stehen $\sup(M_1)$, $\sup(M_2)$ und $\sup(M_1 + M_2)$. Klären Sie dazu zuerst deren Existenz.

(d) Es sei M die Menge aller Menschen. Welche der folgenden Mengen ist mächtiger:

$$\{\text{Donald, Ivanka}\} \quad \text{oder} \quad \{M\}\ ?$$

(3) (a) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Wie ist $x_n \to x$, $n \to \infty$, definiert?

(b) Wann heißt eine Folge (x_n) beschränkt?

(c) Was ist ein Häufungspunkt einer Folge?

(d) Geben Sie ein Beispiel einer Folge mit genau 42 Häufungspunkten an und begründen Sie Ihre Aussage. Konvergiert die von Ihnen angegebene Folge?

(e) Was ist eine Cauchyfolge? Zeigen Sie anhand der Definition und unter Verwendung des Archimedischen Axioms, dass die Folge $(\frac{1}{n})$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

(4) (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent? Wann heißt sie absolut konvergent?

(b) Was besagt das Majorantenkriterium? Was besagt das Quotientenkriterium?

(c) Beweisen Sie das Quotientenkriterium mit Hilfe des Majorantenkriteriums.

(d) Das Quotientenkriterium zur Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ trifft keine Aussage über den Fall $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$. Geben Sie jeweils ein Beispiel dafür an.

(e) Was kann über die (absolute) Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ ausgesagt werden? (Hinweis: Man zeige zunächst $n! < n^n$)

(f) Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{7^{n-2}}$.

(5) (a) Definieren Sie den Begriff der Stetigkeit und der gleichmäßigen Stetigkeit einer komplexwertigen Funktion.

(b) Geben Sie eine stetige, aber nicht gleichmäßig stetige Funktion an. Können Sie ein Beispiel einer gleichmäßig stetigen, aber nicht stetigen Funktion angeben? Begründen Sie Ihre Aussagen.

(c) Bestimmen Sie alle Werte $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ax + a & : x \in [0, 2) \\ 6 & : x \in [2, 4) \\ \sqrt{x + b} & : x \in [4, \infty) \end{cases}$$

stetig ist.

(d) Berechnen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert von

$$\mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

für x gegen 0.

(6) Seien $-\infty < a < b < \infty$ gegeben.

(a) Nennen Sie vier Aussagen, die für jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gelten.

(b) Beweisen Sie drei dieser Aussagen.

(c) Zeigen Sie, dass es eine Zahl x mit $3/2 < x < 2$ und $x^4 = 11$ gibt.

(7) Seien $-\infty < a < b < \infty$ gegeben.

(a) Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wann heißt f in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar? Wann heißt f differenzierbar?

(b) Zeigen Sie: Eine Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in einem Punkt x, wenn sie in x rechts- und linksseitig differenzierbar ist und die beiden einseitigen Ableitungen übereinstimmen.

(c) Untersuchen Sie folgende Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (und, wo möglich, auch ihre Ableitungen) auf links und rechtsseitige Differenzierbarkeit. Was können sie daraus schlussfolgern?

- $x \mapsto |x|$,
- $x \mapsto [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$,
- $x \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} x/|x| & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$
- $x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}.$

(d) Zeigen Sie anhand der Definition von Differenzierbarkeit, dass

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 2x + 7$$

differenzierbar ist.

(e) Sei $g : (a, b) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Funktion, die in $p \in (a, b)$ differenzierbar ist. Zeigen Sie die Differenzierbarkeit von $1/g$ in p und beweisen Sie eine Formel für die Ableitung von $1/g$ in p.

Viel Erfolg!