Spektraltheorie

Sommersemester 2016 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Besprechung Dienstag 10.05.2016**

(1) Sei S ein symmetrischer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit unterer Schranke 0 (d.h. mit $\langle f, Sf\rangle \geq 0$ für alle $f \in D(S)$).

(a) Zeigen Sie $\|(S+\lambda)f\| \geq \lambda\|f\|$ fuer alle $f \in D(S)$ und $\lambda > 0$.

(b) Zeigen Sie die Aequivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $Bild(S+\lambda) = \mathcal{H}$ für ein (alle) $\lambda > 0$.

(ii) Es gilt $-\lambda \in \varrho(S)$ für ein (alle) $\lambda > 0$.

(iii) Es ist S selbstadjungiert.

(c) Sei Q eine dicht definierte nach unten beschränkte Form mit unterer Schranke 0. Sei T der assozierte selbstadjungierte Operator. Zeigen Sie $(-\infty, 0) \subset \varrho(T)$.

(Hinweis: (a) Betrachten Sie $\langle f, (S+\lambda)f\rangle = \langle f, Sf\rangle + \lambda\|f\|^2$.

(b) Nutzen Sie (a). Beachten Sie, dass die Resolventenmenge offen ist. Erinnern Sie sich an die Charakterisierung der selbstadungierten Operatoren unter den symmetrischen Operatoren.

(c) Nutzen Sie (b).)

(2) Sei S ein symmetrischer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit unterer Schranke 0. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\overline{Bild(S+1)} = \mathcal{H}$.

(ii) $Bild(\overline{S}+1) = \mathcal{H}$.

(iii) Der Operator $\overline{S}$ ist selbstadjungiert.

(Hinweis: Sie können (Warum?) die Ergebnisse von Aufgabe (1) auf $\overline{S}$ anwenden.)

(3) Sei (X, m) ein σ-endlicher Maßraum und $V : X \longrightarrow [0, \infty)$ meßbar und Q_V die assoziierte Form

$$Q_V(f, g) = \int_X V\overline{f}g dm$$

auf $L^2(X, (1+V)m)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Die Form Q_V ist beschränkt, d.h. es gilt $D(Q) = L^2(X, m)$ und es gibt ein $C \geq 0$ mit $|Q_V(f, g)| \leq C\|f\|\|g\|$ für alle $f, g \in L^2(X, m)$.

(ii) Es gilt ess-sup$V < \infty$.

(4) Sei (X, m) ein diskreter Maßraum und $b : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ eine Graph über X und Q die assoziierte Form

$$Q(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x, y)\overline{(f(x) - f(y))}(g(x) - g(y))$$

auf

$$D(Q) := \{f \in \ell^2(X, m) : \sum_{x,y} b(x, y)|f(x) - f(y)|^2 < \infty\}.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Die Form Q ist beschränkt, d.h. es gilt $D(Q) = \ell^2(X, m)$ und es gibt ein $C \geq 0$ mit $|Q(f, g)| \leq C\|f\|\|g\|$ für alle $f, g \in \ell^2(X, m)$.

(ii) Es gilt $\sup_{x\in X} \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in X} b(x, y) < \infty$

(Hinweis: (i)$\Longrightarrow$ (ii): Wenden Sie die Ungleichung auf geeignete f und g an.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Es reicht (Warum?) $Q(f, f) \leq C\|f\|^2$ für alle $f \in \ell^2(X, m)$ zu zeigen.)