Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 5 **Abgabe Dienstag 25.11.2011**

(1) Sei $\mathcal{R}$ ein Mengenring über die Menge X und $p \in X$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta_p : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 1, & p \in A, \\ 0, & p \notin A, \end{cases}$$

ein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$ ist.

(2) Es sei $\mathbb{N}$ versehen mit dem Mengenring $\mathcal{R}$ aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Weiterhin sei eine beliebige nichtnegative Abbildung $b : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\nu_b : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\nu_b(A) := \sum_{x \in A} b(x), \qquad A \in \mathcal{R},$$

ein Prämaß ist.

(3) Sei μ ein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$. Zeigen Sie, dass die Vereinigung von abzählbar vielen μ-Nullmengen wieder eine μ-Nullmenge ist.

(4) Sei $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $\mathbb{R}$ und λ das Lebesgueprämaß. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die außerhalb einer λ-Nullmenge stetig ist.

Zusatz

(Z1) Sei $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $\mathbb{R}$. Weiterhin sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nichtfallende, rechtsstetige Funktion. Setze

$$\phi(x+) := \lim_{y \to x+} \phi(y) = \phi(x),$$
$$\phi(x-) := \lim_{y \to x-} \phi(y).$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
\mu(]a,b[) &:= \phi(b-) - \phi(a), \\
\mu(]a,b]) &:= \phi(b) - \phi(a), \\
\mu([a,b[) &:= \phi(b-) - \phi(a-), \\
\mu([a,b]) &:= \phi(b) - \phi(a-).
\end{aligned}$$

Jedes A aus dem Mengenring lässt sich als disjunkte endliche Vereinigung $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$ von beschränkten Intervallen schreiben. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mu_\phi : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\mu(A) := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

ein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$ ist.