C*-Algebren

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3

(1) Sei X ein kompakter Raum. Zeigen Sie, dass zu jedem Charakter $\gamma \in \widehat{C(X)}$ ein $x \in X$ existiert mit $\gamma(f) = \delta_x(f) = f(x)$ für alle $f \in C(X)$.

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins. Für $a \in \mathcal{A}$ definiere den linearen Operator

$$L_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad L_a x := ax.$$

Zeigen Sie, dass $\|L_a\| = \|a\|$ und $\sigma(L_a) = \sigma(a)$.

(3) Sei $C_b((0,1])$ die Algebra der stetigen, beschränkten komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass ein kompakter Raum K existiert so dass $C_b((0,1])$ isometrisch isomorph ist zu $C(X)$, den stetigen Funktionen auf X. Kann $X = [0,1]$ gewählt werden?

(4) Es sei $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ der Raum der komplexen Borelmaße auf $\mathbb{R}$, versehen mit der Variationsnorm

$$\|\mu\| := \sup_{\mathfrak{Z}} \sum_{T \in \mathfrak{Z}} |\mu(T)|,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen von $\mathbb{R}$ in endlich viele paarweise disjunkte Mengen aus der Borel-σ-Algebra von $\mathbb{R}$ gebildet wird. Die Faltung zweier Maße $\mu, \nu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ wird definiert durch

$$(\mu * \nu)(E) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_E(s+t) d\mu(s) d\nu(t),$$

wobei $E \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge ist und χ_E die charakteristische Funktion von E bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ mit der Faltung ist eine kommutative Banachalgebra mit Eins.

(b) Der Operator von $L^1(\mathbb{R})$ nach $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$, der $f \in L^1(\mathbb{R})$ auf das absolutstetige Maß $\mu : E \mapsto \int\limits_E f(t)\, dt$ abbildet, ist ein isometrischer Algebrenhomomorphismus.

(c) Diese Einbettung von $L^1(\mathbb{R})$ ist ein abgeschlossenes Ideal von $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$.