Höhere Analysis II

Wintersemester 2018/2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe Donnerstag 15.11.2018**

(1) Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

(b) Es gilt sogar $f * g \in C_0(\mathbb{R}^N)$. (Hinweis: Approximieren Sie f und g durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^N)$.)

(2) Für $a \in \mathbb{R}^N$ definiere $T_a, M_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ durch

$$(T_a f)(x) = f(x + a) \text{ und } (M_a f)(x) = e^{iax} f(x).$$

Zeigen Sie, daß für die Fouriertransformation $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$F T_a = M_a F \text{ und } F M_{-a} = T_a F.$$

(3) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A \subset X$ sei die Funktion d_A definiert durch

$$d_A : X \longrightarrow [0, \infty), d_A(x) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Zeigen Sie:

(a) d_A erfüllt $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

(b) Es gilt $d_A = d_{\overline{A}}$.