Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe Dienstag 29.11.2009**

(1) Sei $\phi : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$, $u \mapsto \sin(2u) \cdot (\cos u, \sin u)$.

(a) Zeichnen Sie die Kurve.

(b) Zeigen Sie, dass es sich um eine injektive, reguläre Parameterdarstellung handelt.

(c) Bestimmen Sie $T_0\varphi$.

(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ die Rotationsfläche zu $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $r \mapsto \frac{1}{r}$. (Siehe AB4 Aufgabe (1).)

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

(b) Berechnen Sie das Volumen von M.

(c) Äußern Sie Erstaunen! (Begründen Sie Ihr Erstaunen.)

(3) Sei $M = \{(x, |x|) \mid x \in (-1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie eine injektive (stetig differenzierbare!) Parameterdarstellung von M an.

(b) Zeigen Sie, dass es keine reguläre Parameterdarstellung von M gibt.

(4) Der Träger einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$ ist definiert als

$$\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Zeigen Sie

$$\mathrm{supp} f = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U \text{ offen } f|_U \equiv 0\}.$$

Zusatzaufgaben

(Z1) (a) Geben Sie eine stetige injektive Abbildung $\varphi : (0, 1) \to \mathbb{R}^2$ mit kompaktem Bild an.

(b) Gibt es eine stetige bijektive Abbildung $\varphi : (0, 1) \to \mathbb{S}^1$?