Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Mittwoch 11.11. 2009**

(1) Zeigen Sie, dass die diskrete Topologie keine Vektorraumtopologie ist, falls $E \neq \{0\}$.

(2) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Für $x \in M$ und $\emptyset \neq A \subset M$ sei

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y),$$

und für $\varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(A) := \{x \in M : \ d(x, A) \leq \varepsilon\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}$,

(b) $\bar{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(A)$,

(c) Sei $\delta(x) := d(x, A)$. Zeigen Sie, dass $\delta : M \to \mathbb{R}$ Lipschitzstetig ist.

Bemerkung: Seien (M_i, d_i), $i = 1, 2$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ heißt Lipschitzstetig, falls $L > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in M_1$

$$d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_1(x_1, x_2).$$

(3) Zeigen Sie, dass das Produkt abzählbar unendlich vieler metrischer Räume (M_i, d_i), $i \in \mathbb{N}$ metrisierbar ist (d.h. es existiert ein Metrik d auf $\prod M_i$, die die Produkttopologie erzeugt).

(4) Zeigen Sie, dass je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.
Hinweis: Sei $|||\cdot|||$ eine beliebige Norm. Zeigen Sie, $|||\cdot||| \leq C\|\cdot\|_1$, und untersuchen Sie $\inf_{\|x\|_1 \leq 1} |||x|||$!

Zusatzaufgaben

- Zeigen Sie: Das Produkt überabzählbar vieler metrische Räume mit mindestens 2 Elementen ist nicht metrisierbar.

- Es seien X_i, $i \in I$ und Z topologische Räume, $f_i : Y \to X_i$ eine Familie von Abbildungen und Y sei mit der von den Abbildungen erzeugten Initialtopologie $\mathcal{T}_F$ versehen. Zeigen Sie: Eine Funktion $g : Z \to Y$ ist genau dann stetig, wenn alle Abbildungen $f_i \circ g : Z \to X_i$ stetig sind.
  Hinweis: Sei $U := \{O \subset X : \ g^{-1}(O) \text{ offen}\}$. Zeigen Sie, dass das Mengensystem U eine Topologie ist, die $\mathcal{T}_F$ enthält.