Analysis III

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Montag 16.11. 2009**

(1) In der Newtonschen Mechanik bewegt sich ein Massepunkt der Masse m mit Koordinaten $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ in einem Kraftfeld, das durch ein zweimal stetig differenzierbares Potential $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben ist, gemäß der DGL

$$mx'' \;=\; -\nabla V(x).$$

a. Transformieren Sie dieses System in ein System erster Ordnung und zeigen Sie, dass dieses eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.

b. Sei $x : J \to \mathbb{R}^3$ eine Lösung. Zeigen Sie, dass die Energie $H(t) = \frac{m}{2}|x'(t)|? \;+\; V(x(t))$ konstant bleibt.

(2) a. Zeigen Sie, dass zur DGL aus Aufgabe 1 jedes AWP auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar ist, wenn ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $V(x) \geq C$ für jedes $x \in \mathbb{R}^3$.

b. Zeigen Sie, dass für diese Lösung $x(t)$ und $x'(t)$ beschränkt bleiben, wenn gilt $V(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Menge von Lösungen von

$$y' \;=\; f(t, y)$$

einen Vektorraum bildet. Zeigen Sie, dass dann für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f(t, \cdot) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m, v \mapsto f(t, v)$$

linear ist.

(4) Gegeben sei das AWP mit der linearen DGL dritter Ordnung

$$y''' \;-\; 3\,y'' \;+\; 3\,y' \;-\; y \;=\; b, \qquad y(0) = 1.$$

a. Lösen Sie das AWP für die homogene Gleichung ($b(t) \equiv 0$).

b. Lösen Sie das inhomogene AWP mit $b(t) \;=\; t$.

Zusatzaufgabe:

Betrachten Sie das AWP

$$y' \;=\; (1-y^4)y, \qquad y(0)=y_o.$$

Zeigen Sie (ohne die DGL explizit zu lösen), dass das AWP für alle $t_o \in \mathbb{R}$ und $y_o \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq y_o \leq 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist.