Höhere Analysis

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4

(1) Sei $(K_n)_n$ eine Folge kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $(K_n)^\circ \subset K_{n+1}$ und $\bigcup_n K_n = \mathbb{R}$. Für Funktionen $f, g \in C_\mathbb{R}(\mathbb{R})$ ist durch

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{\infty} \min\{2^{-k}, \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in K_k\}\}$$

eine Metrik definiert. Eine Folge $(f_n)_n \subset C_\mathbb{R}(\mathbb{R})$ die bzgl. dieser Metrik konvergiert, heißt kompakt konvergent. Sei $\mathcal{A} \subset C_\mathbb{R}(\mathbb{R})$ eine Teilalgebra, die die Punkte trennt und nirgends verschwindet. Zeigen Sie, dass der Abschluss von $\mathcal{A}$ bzgl. der kompakten Konvergenz mit $C_\mathbb{R}(\mathbb{R})$ übereinstimmt.

(2) Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $C_\mathbb{R}(X)$. Zeigen Sie, wenn $\mathcal{A}$ die Punkte von X trennt, dann gilt entweder $\mathcal{A} = C_\mathbb{R}(X)$ oder es existiert $x_0 \in X$ so dass $\mathcal{A} = \{f \in C_\mathbb{R}(X) : f(x_0) = 0\}$.

(3) Eine Funktion $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass für eine beliebige Wahl von $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)| \leq c.$$

Sei $T_\alpha : S[0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_\alpha\Big(\sum_{k=1}^{n} s_k \chi_{[x_{k-1}, x_k)}\Big) = \sum_{k=1}^{n} s_k(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})),$$

wobei $S[0,1]$ der Raum der Stufenfunktionen auf $[0,1]$ mit der Supremumsnorm ist. Zeigen Sie, dass T_α genau dann ein stetiges, lineares Funktional auf $S[0,1]$ ist, wenn α eine Funktion beschränkter Variation ist.

(4) Sei $\tilde{T}_\alpha$ die Fortsetzung des Funktionals aus Aufgabe 3 auf $PC[0,1]$, den Raum der stückweise stetigen Funktionen auf $[0,1]$ die von rechts stetig sind (gemäß Aufgabe 6 des Weihnachtszettels 09/10). Diese Fortsetzung wird als Riemann-Stieltjes Integral

bezeichnet. Zeigen Sie, dass $(C[0,1])'$ mit dem Raum der Funktionen beschränkter Variation identifiziert werden kann.
Hinweis: Zu gegebenen $\ell \in (C[0,1])'$ setze man ℓ zu einem stetigen linearen Funktional auf $PC[0,1]$ fort und betrachte die Wirkung von ℓ auf Stufenfunktionen der Form $\chi_{[x,y)}$.