Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009 **Prof. Dr. D. Lenz**

Lösungen Zusatzaufgaben Blatt 6

(1) Untersuchen Sie die folgenden Punktmengen aus $\mathbb{R}$ auf Offenheit/Abgeschlossenheit:
a.) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$, b.) $\{0\}\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$, c.) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$.

(2) Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

Lösungen

(1) Sei (M,d) ein metrischer Raum. Wir haben definiert
$U \subset M$ offen $:\Leftrightarrow \forall x \in U\ \exists \epsilon > 0\ U_\epsilon(x) \subseteq U$.
$U \subset M$ abgeschlossen $:\Leftrightarrow U^c := M \setminus U \subset M$ ist offen .
Vorüberlegung: Es gilt für $V \subset M$: $V \subset U \quad\Leftrightarrow\quad V \setminus U = \emptyset \quad\Leftrightarrow\quad V \cap U^c = \emptyset$.

a.) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$ *ist nicht offen.*
Beweis: Offensichtlich ist $1 \in A$. Für $\epsilon < 1/2$ gilt $U_\epsilon(1) \setminus A = (1-\epsilon, 1) \cup (1, 1+\epsilon) \neq \emptyset$, da $U_\epsilon(1) = (1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Daraus folgt nach Vorüberlegung $U_\epsilon(1) \not\subseteq A$ für $0 < \epsilon < 1/2$ und somit ist A nicht offen.

A ist nicht abgeschlossen.
Beweis: Wir zeigen $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ ist nicht offen. Offensichtlich ist $0 \in A^c$. Für alle $\epsilon > 0$ ist $U_\epsilon(0) \cap A = \bigcup_{n>1/\epsilon}\{\frac{1}{n}\} \neq \emptyset$, da $U_\epsilon(0) = (-\epsilon, \epsilon)$. Daraus folgt nach Vorüberlegung $U_\epsilon(0) \not\subseteq A^c$ für alle $\epsilon > 0$, A^c ist deshalb nicht offen und somit A nicht abgeschlossen.

b.) $B = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$ *ist nicht offen.*
Beweis: Wie in a.).

B ist abgeschlossen.
Beweis: Wir zeigen, B^c ist offen. Offensichtlich ist $B^c = (\infty, 0) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \cup (1, \infty)$

und somit eine disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen. Sei nun $x \in B^c$, dann existiert ein offenes Intervall $(a,b) \subset B^c$ in dem x enthalten ist. Für $\epsilon > 0$ mit $\epsilon \leq \min\{x-a, b-x\}$ ist somit $U_\epsilon(x) \subseteq (a,b) \subset B^c$. Deshalb ist B^c offen und B somit abgeschlossen.

c.) *Vorüberlegung* $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) = [-1,1]$.
Beweis: Sei $x \in [-1,1]$ dann ist offensichtlich $x \in (-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $x \in C$. Ist $x \notin [-1,1]$ dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x| > 1 + \frac{1}{N}$ und damit $x \notin (-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ für $n > N$ und $x \notin C$.

C ist nicht offen.
Beweis: Offensichtlich ist $1 \in C$ und für alle $\epsilon > 0$ ist $U_\epsilon(1) \cap U^c = (1, 1+\epsilon) \neq \emptyset$. Somit ist C nach der Vorüberlegung nicht offen.

C ist abgeschlossen.
Beweis: Es gilt $C^c = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Für alle $x \in C^c$ und alle $\epsilon > 0$ mit $\epsilon \leq \min\{|x-1|, |x+1|\}$ gilt $U_\epsilon(x) \subset C^c$. Deshalb ist C^c offen und C abgeschlossen.

(2) *h ist stetig.*
Beweis: Die Stetigkeit ist klar für $(x,y) \neq (0,0)$. Wir zeigen $h(x,y) \to 0$ für $(x,y) \to 0$, d.h. $|h(x,y) - 0| = |h(x,y)| \to 0$ für $|(x,y) - (0,0)| = |(x,y)| \to 0$. Sei

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \max\{x^2, y^2\}.$$

Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|h(x,y)| \leq H(x,y).$$

Die Aussage ist klar falls $x = 0$ oder $y = 0$. Seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} \leq H(x,y).$$

Für $(x,y) \to 0$ gilt $H(x,y) \to 0$. Daraus folgt $|h(x,y)| \to 0$ für $(x,y) \to 0$. Die Funktion h ist somit stetig in $(0,0)$ und damit auf ganz $\mathbb{R}^2$.

h ist stetig differenzierbar und somit differenzierbar.
Beweis: Die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_x h(x,y) &= \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\
\partial_y h(x,y) &= \quad = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

sind offensichtlich stetig für $(x, y) \neq (0, 0)$. Wir zeigen, dass $\partial_x h(x, y) \to 0$, $\partial_y h(x, y) \to 0$ für $(x, y) \to 0$. Da $x^2 \geq 0$ gilt

$$|\partial_x h(x, y)| \leq \frac{|2xy^4|}{|y^4|} = 2|x| \to 0, \quad (x, y) \to (0, 0).$$

Analog gilt $|\partial_y h(x, y)| \to 0$ für $(x, y) \to (0, 0)$. Daraus folgt, dass die partiellen Ableitungen stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind. Das bedeutet h ist stetig differenzierebar und nach dem Satz in der Vorlesung ist h dann differenzierbar.