Analysis I

Wintersemester 2013/2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe 23.01.2014**

Reihen

(1) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz/absolute Konvergenz:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}},$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}, \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{mit} \quad x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = k^2, \ \substack{\text{für } k\in\mathbb{N} \\ \text{geeignet}}, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis zu (a): Es gilt $0 < e^{-2} < 1$.
Hinweis zu (d): Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

(2) Sei

$$N : (0,\infty) \to \mathbb{Q}, \quad N(x) = \begin{cases} 0 & : \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{p} & : \text{für } x = q/p \text{ wobei } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass N in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig ist.

(3) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1, x\neq 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \qquad \text{(d)} \lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{x^2}{|x|}$$

Hinweise: (b) Was ist $(x^3-1)/(x-1)$? (c) $x^2 = 1-(1-x^2)$.

(4) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x,$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2,$
(c) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2,$
(d) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$

Zusatzaufgabe:

(Z1) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $[0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ für alle $n \geq 2$ nicht lipschitzstetig ist.

(Z2) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\xi \in (a,b) : f(\xi+0) \neq f(\xi-0)\}$ abzählbar ist.