# Probeklausur Analysis II für Physiker

**Sommersemester 2009** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Hilfsmittel.** Keine.

**Hinweise:**

- Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen, Fachrichtung und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen.
- Schreiben sie **nicht** mit Bleistift.
- Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.
- Bei (versuchtem) Betrug gilt die Klausur als nicht bestanden.

---

(1) (a) Was versteht man unter dem Begriff Gradientenfeld? Geben Sie zwei äquivalente Charakterisierungen.

(b) Sei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $f(x) = h(|x|)\frac{x}{|x|}$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $f$ und untersuchen, Sie ob es sich dabei um ein Gradientenfeld handelt. **8 Punkte**

(2) (a) Skizzieren Sie die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und bestimmen Sie ihren Rand:

$$[a, b] \times \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a < b.$$

(b) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Ist $(x_n) \subset M$ eine Cauchyfolge mit einer konvergenten Teilfolge $x_{n_k} \to x$, so konvergiert auch die Folge $x_n \to x$. **6 Punkte**

(3) (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit von $f$ in einem Punkt $x_0 \in U$.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ gegeben durch $f(x) = Ax+b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^k$. Bestimmen Sie die Ableitung von $f$ anhand der Definition von Differenzierbarkeit.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Differenzierbarkeit außerhalb des Ursprungs und bilden Sie die partiellen Ableitungen bei $(0,0)$. Untersuchen Sie anschließend die Funktion auf Differenzierbarkeit bei $(0,0)$. **9 Punkte**

(4) (a) Sei $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z(x,y) = x^2 - 2y^2 + y^4$. Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion $z$.

(b) Unter allen in eine Kugel einbeschriebenen Zylinder ist der zu bestimmen, dessen Volumen maximal ist. **8 Punkte**

(5) Zeigen Sie, dass

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$$

in der Nähe von $(1,1)$ eine stetig differenzierbare Lösung $y = \varphi(x)$ hat und berechnen sie deren Ableitung. **4 Punkte**

(6) Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ die $m$-dimensionale Einheitskugel um den Ursprung und $\omega_m$ der Oberflächeninhalt der $m-1$ dimensionalen Einheitssphäre $\partial K$. Sei $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die $u(x) = h(|x|)$ für $|x| > 0$ erfüllt, wobei $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_K \Delta u(x)dx \quad = \quad \omega_m \cdot h'(1).$$

**4 Punkte**

(7) (a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine komplexwertige Folge. Was versteht man unter dem Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$? welche Zusammenhänge zwischen dem Konvergenzradius und der Konvergenz der Potenzreihe kennen Sie?

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n,$$

wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von $n$ ist. **8 Punkte**

(8) (a) Geben Sie die Definition von komplexer Differenzierbarkeit.

(b) Wann heißt eine Funktion holomorph?

(c) Geben Sie jeweils ein Beispiel einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen und einer auf $\mathbb{C}$ nicht komplex differenzierbaren Funktion an. **6 Punkte**

(9) Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z}\, dz$$

mithilfe des Residuensatzes. **4 Punkte**

Viel Erfolg!