Analysis II Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 4

Abgabe am 03.05.2017

Aufgabe 1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und stetig differenzierbar und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen.

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \sin(2x)$.

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion.

(a) $[\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}$.

(b) $[0, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\cos^5 x)\sqrt{\sin x}$.

(c) $[e^{e^1}, 42] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

Hinweis: Finden Sie geeignete Substitutionen.

Aufgabe 4. Sei f eine stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit $f' > 0$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

Zusatzaufgabe

Aufgabe 5. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \text{mit } p \in \mathbb{N}_0,\ q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f Riemann-integrierbar ist.