Analysis III Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Seien $0 < r < R$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

gegeben. Die Menge

$$\mathbb{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(x, y, z) = 0\}$$

beschreibt einen Torus.

(a) Zeichnen Sie $\mathbb{T}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ in jedem Toruspunkt nach einer der Variablen auflösbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ in allen Punkten mit $x \neq 0$ und $|z| \neq r$ lokal nach x aufgelöst werden kann.

(d) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $x = x(y, z)$ aus Teil (c) durch implizites Differenzieren.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}$ eine Untermannigfaltigkeit ist und berechnen Sie den Normalenraum und Tangentialraum im Punkt $p = (r, 0, 0)$.

Aufgabe 2. Gegeben Sei die Untermannigfaltigkeit $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 - z^2 = 4\}$ und $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Bestimmen Sie die Extrema von f.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x| = 1\}$ die $N-1$-dimensionale Einheitssphäre, $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine symmetrische, lineare Abbildung und $Q : \mathbb{S}^{N-1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$. Zeigen Sie, dass Q seine Extrema in den Eigenvektoren zum minimalen und maximalen Eigenwert von A annimmt.

Erinnerung: Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ heißt symmetrisch, falls $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ gilt. In diesem Fall sind alle Eigenwerte von A reell.

Hinweis: Aus Analysis II ist bekannt, dass $\nabla Q(x) = 2Ax$ gilt.