Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Mittwoch 01.07.2009**

(1) Für $r \geq 0$ sei $U_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$ und $S_r := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = r\} \subset \mathbb{R}^d$. Für $R > 0$ sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ harmonisch in U_R, d.h. $(\Delta f)(x) = \partial_1 f(x) + \ldots + \partial_d f(x) = 0$ für alle $x \in U_R$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : (0, R) \to \mathbb{R},\ r \mapsto \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} f(x) dS(x).$$

konstant ist. (Tipp: Zeigen Sie $\frac{d}{dr} F = 0$ und nutzen Sie $|S_r| = r^{d-1}|S_1|$.)

(2) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von Aufgabe (1):

(a) Für $0 < r < R$ ist die Funktion

$$r \mapsto \frac{1}{|U_r|} \int_{U_r} f(x) dx$$

konstant.

(b) Für $0 < r < R$ gilt $f(0) = F(r)$.

(Tipp: Nutzen Sie Ihre Erkenntnisse von Aufgabe (1) und die Tatsache $|U_r| = r^d |U_1| = \frac{r^d}{d} |S_1| = \frac{r}{d} |S_r|$.)

(3) Untersuchen sie den Konvergenzradius folgender Reihen. Untersuchen Sie bei positiven Konvergenzradius auch die Randpunkte.

(a) $\sum\limits_{n \geq 1} n! x^n$, (b) $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{2^n}{n!} x^n$, (c) $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{5^n}{n} (x-2)^n$.

(4) Geben Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihe an

$$\sum_{n \geq 1} n x^n$$

und berechnen Sie den Ausdruck explizit. (Tipp: $\sum n x^n = x \sum n x^{n-1}$)

Zusatzaufgaben

(1) Sei A eine $d \times d$ Matrix mit Norm $\|A\|$ streng kleiner 1, d.h.

$$\|A\| := \sup\{|Ax| \mid x \in \mathbb{R}^d,\ |x| \leq 1\} < 1.$$

Geben Sie das Inverse $(I+A)^{-1}$ der Matrix $I+A$ in Form einer Potenzreihe an und zeigen Sie, dass diese absolut konvergiert. Das Inverse einer $d \times d$ Matrix B ist eine $d \times d$ Matrix C, für die gilt $BC = CB = I$, wobei I die Identität ist, d.h. $Ix = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. (Tipp: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass A eine 1×1 Matrix ist.)

(2) Geben Sie den Konvergenzradius an und berechnen Sie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}.$$

(3) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ eine Menge mit glattem Rand $\partial\Omega$ und $\nu \in \mathbb{R}^3$ die äußere Normale. Weiterhin sei $\rho \geq 0$ und

$$K = (K_i)_{i=1,\dots,3} = \left(\int_{\partial\Omega} \rho z \nu_i dS \right)_{i=1,\dots,3}$$

Beweisen Sie

$$K = (0, 0, \rho \mathrm{vol}(\Omega)).$$

(Interpretation als *Archimedisches Prinzip*: Die Auftriebskraft K_3 in einer Flüssigkeit mit Flüssigkeitsoberfläche in der Ebene $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$ mit Dichte ρ ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge.)