Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 1 **Abgabe Mittwoch 13.04.2011**

(1) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\,, \\ 2-2x & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $H : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$H(x) \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{-3n} h(2^n x \;-\; j)\,,$$

stetig ist.

(2) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in (a,b)$ rechts- und linksseitig differenzierbar ist und für $a < x_1 < x_2 < b$ gilt

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2).$$

(3) Berechnen Sie als Grenzwerte geeigneter Zwischensummen:

(a) $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ (b) $\int\limits_0^1 a^x\,dx,\; a > 0.$

Hinweis: Vorschlag für Zerlegung: $x_k = \frac{k}{n}$.

(4) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1-x & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob f Riemann-integrierbar ist.

b.w.

Zusatzaufgaben

(A) Ist die folgende Funktion Riemann-integrierbar?

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{mit } p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd,} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(B) Benutzen Sie $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$ mit $A_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ (Zusatzaufgabe von Aufgabenblatt 4), um den Wert des Integrals $\int\limits_0^1 x e^x dx$ als Limes einer Obersumme (oder Untersumme) zu bestimmen.

Viel Erfolg!