
Analysis I

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. D. Lenz

Blatt 11

Abgabe 27.01.2011

(1) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 1} & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 1, x \neq 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} \\ \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{x^2}{|x|} \end{array}$$

Hinweise: (b) Was ist $(x^3 - 1)/(x - 1)$? (c) $x^2 = 1 - (1 - x^2)$.

(2) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x,$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2,$
- (c) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2,$
- (d) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$

(3) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist falls f strikt monoton ist.

(4) Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktionen

$$x \mapsto \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{und} \quad x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}.$$

Zusatzaufgabe:

(Z1) Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie: Die Menge $\{\xi \in (a, b) : f(\xi + 0) \neq f(\xi - 0)\}$ ist abzählbar.