
Analysis III

Wintersemester 2009/2010

Prof. Dr. D. Lenz

Blatt 4

Abgabe Montag 23.11. 2009

(1) Gegeben sei die zwei-dimensionale lineare DGL

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \cos 4t & 2 + 2 \sin 4t \\ -2 + 2 \sin 4t & -1 + 2 \cos 4t \end{pmatrix} x.$$

a.) Berechnen Sie die Eigenwerte der Koeffizienten-Matrix.

b.) Zeigen Sie: Die DGL besitzt die unbeschränkte Lösung

$$t \mapsto (e^t \sin 2t, e^t \cos 2t).$$

(2) Betrachten Sie das von einem Parameter α abhängige autonome System

$$x' = \alpha \sin x + y + xy^3$$

$$y' = -x \cos y + \alpha(e^y - 1)$$

a.) Linearisieren Sie die DGL in der Umgebung vom Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$.

b.) Zeigen Sie: Für $\alpha < 0$ ist das System asymptotisch stabil.

(3) Finden Sie eine Parametrisierung von $\Gamma = [0, 1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0, 1]$, also eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren Bild durch Γ gegeben ist.

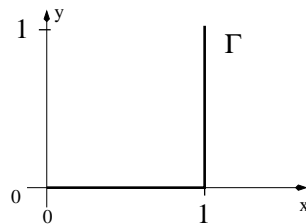


Abbildung 1: Die Kurve Γ hat eine 'Ecke'.

(4) Berechnen Sie die Länge des Parabelstücks, das durch den Graphen der Funktion $t \mapsto t^2$ für $t \in [-1, 1]$ gegeben ist.