Operatoren auf Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2017 **Marcel Schmidt**

Blatt 1

(1) Beweisen Sie, dass die Sphäre $\mathbb{S}^n$ keinen Atlas besitzt, der nur aus einer Karte besteht.

(2) Zeigen Sie, dass der projektive Raum $P^n(\mathbb{R})$ eine n-Mannigfaltigkeit ist.

(3) Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas. Zeigen Sie, dass eine eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{D}$ der Ordnung k existiert, mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.

(4) Es sei $(M, \mathcal{D})$ eine C^k-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{D}$ erzeugender C^k-Atlas. Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ und $1 \leq l \leq k$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $f \in C^l(M, \mathbb{R}^n)$.

(ii) Für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ist
$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$
eine C^l-Abbildung.

(iii) Für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ ist
$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$
eine C^l-Abbildung.

Erinnerung: Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^m$ heißt regulär, falls für alle $x \in W$ die Ableitung $Df(x)$ maximalen Rang hat, das heißt

$$\operatorname{Rang} Df(x) = \begin{cases} n & \text{falls } n \leq m, \\ m & \text{falls } n > m, \end{cases}$$

gilt.

(5) Glatte Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

(a) Beweisen Sie, dass für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in M$ und $l \leq n$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Es existiert eine offene Umgebung W von p und eine glatte reguläre Funktion $g : W \to \mathbb{R}^{n-l}$ mit

$$M \cap W = \{x \in W \mid g(x) = 0\}.$$

(ii) Es existiert eine offene Umgebung W von p, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^l$, eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-l}$ und eine Permutation $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$M \cap W = P\{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

(b) Es sei $l \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass für alle $p \in M$ eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus (a) gilt. Zeigen Sie, dass M ausgestattet mit der Unterraumtopologie eine l-Mannigfaltigkeit ist.

(c) Es sei $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ die übliche glatte Struktur des $\mathbb{R}^n$ und es seien $l \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in (b). Eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ heißt l-Schnitt für M, falls

$$U \cap M = \{x \in U \mid \varphi(x)_{l+1} = \ldots = \varphi(x)_n = 0\}.$$

Ferner sei

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l,\ (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^l).$$

Zeigen Sie, dass M ausgestattet mit der Unterraumtopologie und der von dem Atlas

$$\{(U \cap M, \pi \circ \varphi|_{U \cap M}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n} \text{ ist } l\text{-Schnitt für } M\}$$

erzeugten differenzierbaren Struktur eine glatte Mannigfaltigkeit ist.

(6) (a) Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und es seien (U, φ) und (V, ψ) Karten mit lokalen Koordinatenfunktionen $x^1, \ldots, x^n$ bzw. $y^1, \ldots, y^n$. Beweisen Sie, dass für $p \in U \cap V$ gilt

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (y^j) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \frac{\partial}{\partial x^i} y^j(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p.$$

Bemerkung: Etwas kompakter lässt sich diese Identität für die induzierten Vektorfelder schreiben. Auf $U \cap V$ gilt dann nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(b) Auf $\mathbb{R}^2$ seien die glatten Karten

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto v$$

mit Koordinatenfunktionen x, y (Standardkoordinaten) und

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(z, 0) \mid z \leq 0\} \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi),\ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mapsto (r, \varphi)$$

mit Koordinatenfunktionen r, φ (Polarkoordinaten) gegeben. Drücken Sie die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ aus und umgekehrt.

(c) Auf $\mathbb{R}^2$ seien die glatten Karten

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto v$$

mit Koordinatenfunktionen x, y und

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x, y + x^3)$$

mit Koordinatenfunktionen $\tilde{x}$,$\tilde{y}$ gegeben. Zeigen Sie, dass im Punkt $p = (1, 0)$ gilt

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \neq \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right|_p .$$

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass die induzierte Basis im Tangentialraum stets von der kompletten Karte und nicht nur von einzelnen Koordinatenfunktionen abhängt.