Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 1 **Abgabe: 22.10.2018**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_d$ genau dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wenn (X, d) separabel ist (d.h. eine abzählbare dichte Teilmenge enthält).

(2) Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X_i \to X$, $i \in I$, Abbildungen. Für ein System von Teilmengen $\mathcal{T}$ von X sind äquivalent:

   (i) $\mathcal{T}$ ist die (bezüglich Mengeninklusion) größte Topologie, für die alle Abbildungen $f_i, i \in I$, stetig sind.

   (ii) Es gilt $O \in \mathcal{T}$ genau dann, wenn $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$.

   (iii) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie und ist $(X', \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : X \to X'$ genau dann stetig, wenn $g \circ f_i$ für alle $i \in I$ stetig ist.

   Insbesondere existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die einer der drei Bedingungen genügt.

(3) Beweisen Sie, dass die Sphäre $\mathbb{S}^n$ keinen Atlas besitzt, der nur aus einer Karte besteht.

(4) Zeigen Sie, dass der projektive Raum $P^n(\mathbb{R})$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

(5) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ stetig. Weiterhin sei $\mathrm{Graph}(f)$ ausgestattet mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathrm{Graph}(f) \to U$, $(x, y) \mapsto x$ ein Homöomorphismus ist.