Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Weihnachtszettel

(1) Der Fredholm-Operator mit Kern $k(s,t)$ ist definiert durch

$$Tf(s) := \int_a^b k(s,t)f(t)\,dt.$$

(a) Sei $k \in C([a,b] \times [a,b])$. Bestimmen Sie die Norm von $T : C([a,b]) \to C([a,b])$.

(b) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$M(k) := \sup_{s \in [a,b]} \int_a^b |k(s,t)|\,dt < 1.$$

Dann hat die Gleichung $(Id - T)f = g$ eine eindeutig bestimmte stetige Lösung.

(c) Hat die Gleichung in (b) für beliebiges stetiges k eine Lösung?

(2) Bestimmen Sie das Spektrum der folgenden Operatoren

(a) $T : C(K) \to C(K)$, $Tf(s) := sf(s)$, wobei $K \subset \mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Menge ist.

(b) $T : \ell^p \to \ell^p$, $T(x) := (\alpha_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $1 \le p \le \infty$ und $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

(3) Der Links-Shift $S_l : \ell^p \to \ell^p$ ist definiert durch $S_l(x) := (x_2, x_3, \dots)$, wobei $1 \le p \le \infty$. Bestimmen Sie das Spektrum von S_l.
(Hinweis: Suchen Sie Eigenfunktionen!)

(4) Jede kompakte, nichtleere Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ ist Spektrum eines beschränkten Operators $T : \ell^2 \to \ell^2$.

(5) Sei $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ der komplexe Vektorraum der komplexwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ und

$$T : D(T) \to C([a,b]),\ Tf(t) := f'(t) \text{ für } a \le t \le b.$$

Bestimmen Sie das Spektrum von T für die folgenden Definitionsbereiche:

(a) $D(T) := C^1([a,b])$.

(b) $D(T) := \{f \in C^1([a,b]) : f(a) = 0\}$.

(c) $D(T) := \{f \in C^1([a,b]) : f(a) = f(b)\}$.

Hinweis: Bei $(T - \lambda)f = g$ handelt es sich um eine inhomogene, lineare Differentialgleichung.

(6) Sei X ein Banachraum, $Z \subset X$ ein dichter Unterraum und T ein linearer Operator von Z in einen Banachraum Y. Dann gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{T}$ von T auf X.

(7) Sei $1 \leq p < \infty$ und $A \subset \ell^p$. Dann ist A genau dann relativ kompakt, wenn A beschränkt ist und

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

(8) Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|T\| \in \sigma(T)$. Dann gilt $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$.