Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 3 **Abgabe Mittwoch 11.11.2015**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) $M^\circ = \{x \in X \mid M \text{ ist Umgebung von } x\}$
$= \{x \in X \mid \text{es existiert } r_x > 0 \text{ mit } U_{r_x}(x) \subseteq M\}$.

(b) $\overline{M} = \{x \in X \mid \text{jede Umgebung von } x \text{ enthält Punkte von } M\}$
$= \{x \in X \mid \text{ es gibt } (x_n) \text{ in } M \text{ mit } x_n \to x\}$.

(c) $\partial M = \{x \in X \mid \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap M \neq \emptyset$
$\text{und } U \cap X \setminus M \neq \emptyset\}$.

(2) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen M eines metrischen Raumes (X, d) gilt:

(a) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

(b) $(M^\circ)^\circ = M^\circ$.

(c) Im Allgemeinen ist nicht $\partial(\partial M) = \partial M$.

(3) Sei $X = \mathbb{R}^N$ mit der euklidischen Metrik d_2. Beweisen Sie, dass für $x \in X$ und $r > 0$ für die offene Kugel $U_r(x)$ um x mit Radius r und die abgeschlossene Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r gilt

$$\overline{U_r(x)} = B_r(x), \qquad B_r^\circ(x) = U_r(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass ein $p \in X$ genau dann $\|p - x\| = r$ erfüllt, wenn in jeder Umgebung von p ein Punkt u mit $\|u - x\| < r$ als auch ein Punkt v mit $\|v - x\| > r$ liegen.

(4) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{F_n\}_{n \geq 1}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter, nichtleerer Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(a) $F_n \supseteq F_{n+1}$ für alle $n \geq 1$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam} F_n = 0$.

Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ gelten muss.

Erinnerung: Für eine beschränkte Menge $B \subseteq X$ bezeichnet

$$\text{diam} B = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in B\}$$

den Durchmesser von B.

Hinweis: Wählen sie eine Folge (x_n) in X mit $x_n \in F_n$ für alle $n \geq 1$. Zeigen sie dann, dass diese eine Cauchy-Folge ist.

Zusatzaufgaben

(1) Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung besprochene normierte Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ vollständig ist.

Anleitung: Sei $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge. Zeigen Sie der Reihe nach:

- u_n konvergiert punktweise gegen eine Folge u, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $u_n(m) \to u(m)$.
- Es existiert $c > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\|(u)_N\|_2 \leq c,$$

  wobei $(u)_N = (u(1), u(2), \dots, u(N), 0, \dots)$ für $u = (u(1), u(2), \dots)$ definiert ist.
- $u \in \ell^2(\mathbb{N})$.
- $\|(u - u_n)_N\| \to 0$ gleichmäßig in N.

Viel Erfolg!