Höhere Analysis

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe Mittwoch 23.06.2010**

(1) Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$. Zeigen Sie:

  (a) Ist A kreisförmig, so ist $\bar{A}$ kreisförmig.

  (b) Ist A kreisförmig und $0 \in A^\circ$, so ist A° kreisförmig.

(2) Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$. Zeigen Sie:

  (a) Ist A konvex, so auch $\bar{A}$ und A°.

  (b) Ist A konvex und $A^\circ \neq \emptyset$, so ist $\overline{A^\circ} = \bar{A}$.

  (c) Es ist $\operatorname{conv}(A + B) = \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)$.

(3) Sei $2 < p < \infty$ und $x, y \in \ell^p$. Zeigen Sie die Clarkson'sche Ungleichung

$$\|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)$$

Folgern Sie daraus, dass ℓ^p für $2 < p < \infty$ gleichmäßig konvex ist.

(4) Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt beschränkt, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein $\alpha > 0$ gibt mit $A \subset \alpha U$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

  (a) A ist beschränkt.

  (b) Für jede Folge (x_n) in A und jede Nullfolge (α_n) in $\mathbb{K}$ ist $(\alpha_n x_n)$ eine Nullfolge in E.