Höhere Analysis I

Sommersemester 2018 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe Donnerstag 28.06.2018**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Vektorraum $C_0(X)$ ist definiert als die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, sodass für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_\varepsilon \subset X$ existiert mit $|f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \notin K_\varepsilon$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $X = \mathbb{R}$ ausgestattet mit der euklidischen Metrik gilt die Gleichheit

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig mit } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}.$$

(b) Für $X = \mathbb{N}$ mit der diskreten Metrik gilt die Gleichheit

$$C_0(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \lim_{n\to\infty} f(n) = 0\}.$$

(2) Ein lineares Funktional $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ heißt Banachlimes, wenn φ folgende drei Eigenschaften erfüllt:

(i) Es gilt $\varphi \circ S = \varphi$ für den Linksshift $S(x_1, x_2, \ldots) := (x_2, x_3, \ldots)$,

(ii) Sind alle $x_k \geq 0$, so ist $\varphi(x) \geq 0$,

(iii) Für die Folge $e = (1, 1, \ldots)$ ist $\varphi(e) = 1$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ein Banachlimes, so gilt:

(1) Für alle $x = (x_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ist $\liminf x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup x_n$.

(2) φ ist stetig mit Norm $\|\varphi\| = 1$.

(3) φ ist nicht multiplikativ, d.h. es existieren $x, y \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ mit $\varphi(x)\varphi(y) \neq \varphi(x \cdot y)$.

(b) Es gibt Banachlimiten.
Hinweis: Betrachten Sie den Untervektorraum $U := \{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : \lim x_n \text{ existiert}\}$ und setzen Sie ein geeignetes lineares Funktional bezüglich dem sublinearen Funktional $p(x) := \limsup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ fort.

(3) Seien ν und μ endliche Maße auf dem meßbaren Raum $(X, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) Es gilt $\mu(A) = 0$ für alle meßbaren A mit $\nu(A) = 0$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|\mu(E)| < \varepsilon$ falls $E \in \mathcal{A}$ und $\nu(E) < \delta$.

(4) Sei ν ein positives Maß auf dem meßbaren Raum $(X, \mathcal{A})$, $h \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ und $S \subset \mathbb{C}$ eine abgeschlossene Teilmenge mit

$$\frac{1}{\nu(E)} \int_E h d\nu \in S$$

für alle meßbaren E mit $\nu(E) > 0$. Zeigen Sie, dass h fast sicher nur Werte in S annimmt.