Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Mittwoch 25.05.2011**

(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ und $p \in U$. Zeigen Sie:

(a) Ist f stetig in p, so ist f auch richtungsstetig in p.

(b) Ist f richtungsstetig in p, so ist f auch partiell stetig in p.

(2) Zeigen Sie mittels ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, dass die folgenden Funktionen stetig sind:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^x \\ e^y \end{pmatrix}$

(c) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige lineare Abbildung.

(3) Sei (X, d) ein metrischer Raum und und $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und $|f|$ stetig sind.

(4) Sei $\mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Metrik versehen. Zeigen Sie, dass dann die Projektion auf die j-te Komponente

$$\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad \pi_j(x_1, \ldots, x_m) = x_j$$

stetig ist.
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f_j := \pi_j \circ f$ für alle $j = 1, \ldots, m$ stetig ist für $j = 1, \ldots, m$.

Zusatzaufgaben

- Es seien (X_j, d_j) für $j = 1, \ldots, N$ metrische Räume und $X = X_1 \times \cdots \times X_N$ das metrische Produkt dieser Räume, versehen mit der Metrik

  $$d((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) = \sum_{j=1}^{N} d_j(x_j, y_j).$$

  Zeigen Sie, dass (X, d) genau dann vollständig ist, wenn alle (X_j, d_j), $j = 1, \ldots, N$ vollständig sind.

Viel Erfolg!